



UNIVERSIDAD
NACIONAL DE
EDUCACIÓN

DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS



Coordinadora:
Roxana Auccahuallpa Fernández

El libro *Didáctica de las matemáticas* es un compendio de siete trabajos realizados por matemáticos y educadores dedicados a la investigación en el campo de la educación matemática. Estos investigadores forman parte de la Universidad Nacional de Educación (UNAE) e integran el grupo de investigación institucional Eureka 4i, un grupo activo y productivo conformado también por docentes externos. Cada miembro posee formación diferente y trabaja en distintas líneas de investigación en el campo de las matemáticas y la educación matemática, dentro y fuera del contexto escolar. Sus trabajos abordan, desde teorías de vanguardia, temas como metodologías innovadoras, material concreto, geometría, estadística y etnomatemática.

Didáctica de las matemáticas

Coordinadora:

Roxana Aucchahualpa Fernández

DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

©© Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0)

ISBN: 978-9942-783-54-7

Libro evaluado por pares doble ciego

Primera edición: mayo, 2021

Universidad Nacional de Educación del Ecuador (UNAE)

Rebeca Castellanos Gómez, PhD.

Rectora

Luis Enrique Hernández Amaro, PhD.

Vicerrector académico

Graciela de la Caridad Urias Arbolaez, PhD.

Vicerrectora de investigación y posgrado

Consejo Editorial

Dra. Madelin Rodríguez

Representante del Consejo Superior

Universitario

Dra. Graciela de la Caridad Urias Arbolaez

Vicerrectora de Investigación y Posgrados.

Dr. Luis Enrique Hernández Amaro

Vicerrector Académico

Dr. Roberto Raúl Ponce Cordero

Coordinador de Investigación (D)

Dra. Janeth Catalina Mora Oleas

Coordinadora de Gestión Académica de

Grado (D)

Dra. Ana Delia Barrera Jimenez

Coordinadora de Gestión Académica de

Posgrado

Mgt. Sofía Calle Pesántez

Directora de Editorial

Dra. Gisela Consolación Quintero de Chacón

Representante docente

Dra. Melvis Lissety González Acosta

Representante docente

Dra. Geycell Emma Guevara Fernandez

Representante docente

Dr. Miguel Orozco Malo

Representante docente

Editorial UNAE

Sofía Calle Pesántez, Mtr.

Directora

Pedro Molina, Dis.

Diseñador y diagramador

Antonio Bermeo Cabrera, Lcdo.

Ilustrador

Lcda. Karina López

PhD. Gloria Riera Rodríguez.

Corrección de estilo

editorial@unae.edu.ec

www.unae.edu.ec

Teléfono: (593) (7) 370 1200

Parroquia Javier Loyola (Chukupata)

Azogues, Ecuador

Índice

Capítulo 1	19
Un nuevo enfoque de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas para el siglo XXI: método abierto basado en números	
<i>Abdón Pari Condori</i>	
Capítulo 2	51
Construcción del pensamiento matemático	
<i>Marco Vinicio Vásquez Bernal</i>	
Capítulo 3	79
Empoderamiento docente: una reflexión a partir de la reproducibilidad de situaciones de enseñanza	
<i>Javier Lezama</i>	
<i>Daniela Reyes-Gasperini</i>	
Capítulo 4	115
Etnomatemática: una alternativa para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas	
<i>Roxana Auccahuallpa Fernández</i>	
Capítulo 5	141
Etnomatemática como un programa para la acción pedagógica subversiva y responsable en los cursos de formación de profesores de matemáticas	
<i>Milton Rosa</i>	
<i>Daniel Clark Orey</i>	
Capítulo 6	165
La enseñanza de las matemáticas en el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de geometría	
<i>María José Ferreira da Silva</i>	
<i>Saddo Ag Almouloud</i>	
Capítulo 7	195
La ansiedad y el agrado en clases de estadística: un estudio preliminar	
<i>Ana Paola Castillo Domenech</i>	
<i>Nathan C. Ryan</i>	

PRÓLOGO

Roxana Auccahuallpa Fernández

El libro *Didáctica de las matemáticas* es un compendio de siete trabajos realizados por matemáticos y educadores dedicados a la investigación en el campo de la educación matemática. Estos investigadores forman parte de la Universidad Nacional de Educación (UNAE) e integran el grupo de investigación institucional Eureka 4i, un grupo activo y productivo conformado también por docentes externos. Cada miembro posee formación diferente y trabaja en distintas líneas de investigación en el campo de las matemáticas y la educación matemática, dentro y fuera del contexto escolar. Sus trabajos abordan, desde teorías de vanguardia, temas como metodologías innovadoras, material concreto, geometría, estadística y etnomatemática.

La obra parte del hecho de que existen muchos aspectos debatibles en la disciplina, en concordancia con lo que plantea el matemático Freudenthal (1973) desde la Educación Matemática Realista (EMR):

Existen muchas formas de comprensión en matemáticas. En cualquier momento puedes creer que acabas de alcanzar la comprensión definitiva sobre alguna materia, de manera que nada queda por desear. Pero no existe la comprensión definitiva en matemáticas, siempre hay un contexto más amplio en el que cabe comprender cualquier problema, siempre hay un punto de vista más alto y, por último —parece el más bajo, pero quizás es el más alto— puedes aprender desde la perspectiva del niño que está aprendiendo (p.110).

En una línea similar, el ambateño ecuatoriano Marcos Guerrero Ureña (2004), en su libro *Los dos máximos sistemas del mundo: las matemáticas del viejo y nuevo mundo*, plantea:

La historia de la ciencia se ha ido elaborando bajo la premisa de que la configuración básica del saber científico es un proceso acaecido dentro de las fronteras de la civilización occidental. Si bien hoy se tiende a admitir que los importantes y copiosos desarrollos intelectuales de las antiguas culturas egipcia y babilónica, o de la hindú y china, son progenitores de ese saber, no se les reconoce,

en cambio, como productos científicos propiamente dichos. El argumento esgrimido es bastante convincente y recoge el hecho de que ninguno de los antecedentes de la matemática griega alcanzó a sistematizarse como una geometría —al modo de los *Elementos* de Euclides— con cuya aparición pudo cimentarse el escenario para la fluida realización del pensar y el conocer (p.2).

De igual modo, Clifford A. Pickover, citado por Pari (2014), señala que en la historia de las matemáticas se han dado muchos estudios simultáneos, por ejemplo: el matemático alemán August Möbius (1790-1868) descubrió en 1868 la cinta que lleva su nombre (un objeto maravilloso de una sola cara) en el mismo momento en que lo hacía, de forma independiente, un académico contemporáneo, también alemán, Johann Benedict Listing (1808-1882). Este descubrimiento simultáneo de la cinta es parecido a lo que sucedió en el cálculo con el británico Isaac Newton (1643-1727) y con el matemático alemán Gottfried Leibniz (1646-1716), o con lo que pasó con el matemático húngaro János Bolyai (1802-1860) y el matemático ruso Nikolai Lobachevsky (1793-1856), ambos desarrollaron la geometría hiperbólica de forma independiente y, según parece, al mismo tiempo. Y podríamos seguir señalando más descubrimientos de personas separadas en el tiempo y el espacio que han llegado a resultados muy similares, pero no idénticos.

Esta coincidencia nos lleva a preguntarnos ¿por qué hay tantos descubrimientos científicos hechos al mismo tiempo por gente que trabaja de manera independiente? En ciertos casos, la explicación estaría en los contactos e influencias entre distintos grupos. No obstante, la verdadera respuesta reside en la potencia de la capacidad intelectual del ser humano. En esa perspectiva, los autores del libro consideran las diferentes áreas de las matemáticas y reconocen el valor de las prácticas matemáticas desarrolladas por las diferentes culturas, regiones y civilizaciones. Situados en ese contexto, para abarcar esa pluralidad, preferimos utilizar el término *matemáticas* y no la forma singular propuesta por ciertos autores.

En cuanto a la didáctica de las matemáticas, tomamos en cuenta la evolución del concepto dado a lo largo de la historia, desde su concepción como arte hasta la época actual, en la que se la considera

como una ciencia de la educación con identidad propia, con objeto de estudio específico, con una comunidad de científicos dedicados a la investigación y que ha dado lugar a un cuerpo de conocimientos propio. En sus orígenes, se la consideró como un arte, el profesor era un artista que modelaba a los alumnos, pero bajo esa arista era difícil analizar y evaluar su práctica, así como someter a reglas aspectos que explicasen la relación profesor-alumno.

Las mejoras en los planes de estudio de la disciplina se sucedieron a partir del 4 de julio de 1957, fecha en la que la ex Unión Soviética puso en órbita el Sputnik I, y del 3 de noviembre del mismo año, cuando el lanzamiento Sputnik II, tripulado por la perrita Laika, dio origen a la denominada era espacial (Contreras, 2012). Años después del salto espacial, emergió una fiebre revolucionaria que dio lugar a propuestas de programas de enseñanza de las matemáticas y así apareció el movimiento de las matemáticas modernas, cuyo eje se basó en la renovación de los programas de enseñanza, el currículo y los contenidos, sobre la base de la teoría de conjuntos y el estructuralismo del grupo Bourbaki. El proceso de enseñanza más utilizado fue la modalidad de clase magistral del profesor, seguido de una sobredosis de ejercitación en la que el alumno aprendía a hacer matemáticas en forma mecánica, memorizando y repitiendo fórmulas, procedimientos y demostraciones.

A comienzos de la década de los 70, bajo la influencia de la psicología, el saber didáctico se convirtió en un saber técnico, por lo que la didáctica de las matemáticas podía considerarse como un conjunto de saberes normativos, pero no explicativos, cuyo objetivo era proporcionar al profesor un conjunto de recursos técnicos que lo ayudasen a mejorar sus clases. Contreras (2012) apunta a que existían dos enfoques: (a) uno centrado en el pensamiento del alumno, bajo la influencia del aprendizaje significativo (Ausubel, 1968), y un segundo, centrado en el pensamiento del profesor y su formación profesional docente, sus creencias y concepciones sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje (Thompson, 1992).

Históricamente la didáctica de las matemáticas hace su aparición en la década de los 70, cuando Guy Brousseau (1972) efectúa la primera formulación de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD), Hans

Freudenthal (1973) plantea la Enseñanza de la Matemática Realista (EMR), Yves Chevallard (1989) propone la Teoría de la Didáctica de lo Antropológico (TAD) y Vergnaud (1994) presenta la Teoría de los Campos Conceptuales (TCC) desarrollada a partir del legado de Vygotsky. Con estas propuestas,

La didáctica de la matemática no se encierra en el interior de la epistemología de la matemática, entendida como el estudio de la génesis y la estructura del conocimiento matemático, sino que se abre a la posibilidad de estudiar al sujeto que está aprendiendo al interior de su propia actividad, más concretamente al interior de la actividad matemática escolar, surge la epistemología experimental o epistemología del aprendizaje de la matemática, como objeto primario de la investigación en didáctica de la matemática (Contreras, 2012, p.22).

La incorporación del conocimiento matemático como objeto de estudio de la didáctica de las matemáticas ha provocado muchos cambios importantes y una ampliación de su problemática ha conducido a Yves Chevallard (1991, p.35) a proponer a la didáctica de la matemática como la ciencia que trata el proceso de estudio como objeto primario de la investigación didáctica. Así, el proceso de enseñanza y el proceso de aprendizaje se convierten en objetos secundarios, aunque no por ello menos importantes. Si la didáctica es la ciencia que trata el proceso de estudio, el proceso de enseñanza es solo uno de sus varios subprocesos. La palabra *didáctica*, tal como la define Bruno D' Amore (2006, p.26), es el arte de enseñar la ciencia a partir de procesos de enseñanza y aprendizaje que vinculen al estudiante, docente y al saber matemático.

En conclusión, los campos generales de estudio de esta disciplina podrían ser los siguientes: (1) desarrollo de teoría, (2) epistemología, (3) formación del profesorado, (4) currículum de matemáticas, (5) cognición matemática, (6) enseñanza de temas de matemáticas específicos, (7) sociología de la educación matemática y (8) metodología de la investigación.

Los diferentes capítulos de este libro, en correspondencia con el Modelo Pedagógico de la Universidad Nacional de Educación UNAE y las nuevas tendencias de la educación matemática del siglo XXI,

pretenden motivar a los docentes, estudiantes e investigadores del campo de la educación matemática a generar propuestas innovadoras que contribuyan a esta disciplina, tal como se puede consultar en el texto *De matemática para algunos a matemática para todos*.

El capítulo 1, “Un nuevo enfoque de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas para el siglo XXI: método abierto basado en números”, muestra que el algoritmo Abierto Basado en Números, creado por Jaime Martínez Montero en el 2008, es una alternativa en el campo de la didáctica de las matemáticas para mejorar la enseñanza y aprendizaje de esta ciencia. Se trata de un enfoque constructivista que responde a las exigencias del aprendizaje del siglo XXI y abarca habilidades de pensamiento de orden superior, como la resolución de problemas y el pensamiento innovador.

El capítulo 2, “Construcción del pensamiento matemático”, pretende generar conocimiento en los estudiantes a partir del desarrollo del razonamiento matemático por medio de ejemplos y actividades que emplean material concreto. El autor busca mostrar cómo las matemáticas surgen de la práctica y sirven para solucionar problemas de la vida cotidiana. Lo valioso de los resultados matemáticos que se presentan no son coincidencias, estos surgen de la experimentación con el material concreto.

En el capítulo 3, “Empoderamiento docente: una reflexión a partir de la reproducibilidad de situaciones de enseñanza”, se discuten dos conceptos claves para la reflexión sobre el discurso didáctico contemporáneo en matemáticas: la *reproducibilidad de situaciones de aprendizaje y empoderamiento docente*. La discusión sobre la reproducibilidad nos lleva a sus nociones externas e internas. La reproducibilidad interna está asociada con el significado que inicia la reflexión sobre el empoderamiento, una nueva relación con el conocimiento lleva al profesor a la búsqueda de aquellas prácticas que dan origen y significado al objeto matemático.

El capítulo 4, “Etnomatemática: una alternativa para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas”, busca incorporar nuevas alternativas o estrategias para su desarrollo. Parte de la pregunta por qué es importante el conocimiento matemático. Y, más allá de este conocimiento, invita a entender las formas y maneras de comprender

las matemáticas de los grupos profesionales o etnias culturales. La etnomatemática busca valorar y reconocer los saberes y prácticas culturales de esos grupos como insumos para aprender matemáticas desde sus propios conocimientos. La etnomatemática, además, puede ser una estrategia para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas a partir de los conocimientos y saberes matemáticos que poseen los niños y traen desde su casa, saberes considerados fundamentales para el aprendizaje de una ciencia abstracta.

El capítulo 5, “Etnomatemática como un programa para la acción pedagógica subversiva y responsable en los cursos de formación de profesores de matemáticas”, desarrolla una propuesta de etnomatemática para los cursos de formación de profesores de matemáticas en sintonía con las tendencias actuales de la educación matemática. Estos cursos pueden desarrollar la investigación sobre las ideas, procedimientos y prácticas matemáticas que suceden en contextos culturales distintos para desarrollarlos pedagógicamente por medio de la elaboración de actividades contextualizadas y fundamentadas en la perspectiva etnomatemática. Es un capítulo teórico que discute algunos aspectos de la subversión responsable en relación con el desarrollo de una acción pedagógica arraigada en la perspectiva etnomatemática, que puede ser considerada como una crítica reflexiva y constructiva a los cursos de formación de profesores de matemáticas.

El capítulo 6, “La enseñanza de las matemáticas en el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de geometría”, presenta algunas reflexiones teóricas con respecto a la enseñanza de la geometría (geometría espacial). La contribución a partir de la teoría de los registros de representación semiótica para la didáctica de la matemática nos permite elaborar situaciones para la enseñanza de la geometría. Estas admiten no solo una conversión de representaciones de figuras, sino la utilización de softwares de representación dinámica.

El capítulo 7, “La ansiedad y el agrado en clases de estadística: un estudio preliminar”, muestra cómo la curiosidad, el pensamiento crítico y la capacidad de disfrutar el proceso son características que deberían estar relacionadas con el aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, la realidad de la experiencia en el aula evidencia que el estudiante promedio asocia a esta disciplina con el miedo, la ansiedad

y el desagrado, de ahí se origina la necesidad de estudiar las causas que generan estas emociones aversivas hacia la asignatura, y en particular hacia la estadística, así como sus efectos sobre el éxito académico.

Referencias bibliográficas

- Contreras, F. (2012). La evolución de la didáctica de la matemática. *Horizonte de la ciencia*, 2 (2), 20-25.
- Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Aique.
- D' Amore. B. (2006). *Didáctica de la matemática*. Editorial Magisterio.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Reidel Publishing Company.
- Guerrero Ureña, M. (2004). *Los dos máximos sistemas del mundo: Las matemáticas del Viejo y Nuevo Mundo*. ABYA-YALA.
- Pari, A. (2014). Jaime Escalante y su método de enseñanza de las matemáticas. Un referente válido para el contexto africano. En J. M. Hernández y E. Eyeang (Coords.), *Lengua, Literatura y Ciencia de la Educación en los sistemas educativos del África Subsahariana* (pp. 763-776). Universidad de Salamanca.

CAPÍTULO 1

UN NUEVO ENFOQUE DE ENSEÑANZA- APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS PARA EL SIGLO XXI: MÉTODO ABIERTO BASADO EN NÚMEROS

Abdón Pari Condori
apariducho@gmail.com
Universidad Adventista de Bolivia

1. Introducción

Aunque las matemáticas se han enseñado y aprendido durante milenios, hasta los años ochenta del siglo pasado no se había estudiado de manera seria la naturaleza y la calidad de la enseñanza y el aprendizaje de esta disciplina (Cantoral y Farfán, 2003, p.28). Según los expertos en didáctica e investigadores de educación matemática, existe un consenso en que el enfoque convencional para la enseñanza de las matemáticas centrado en la exposición, que promueve la memorización de reglas, fórmulas y transferencia de estrategias de resolución de problemas es menos relevante para las necesidades del estudiante del siglo XXI (Ablewhite, 1971; Adamuz y Bracho 2011; Martínez, 2011). De acuerdo con esta perspectiva, es necesario buscar, generar y plantear nuevas alternativas didácticas que supongan cambios profundos en la concepción de su enseñanza y aprendizaje, así como propuestas que puedan contribuir a los aprendizajes del siglo XXI, y que coadyuven en la forja de competencias como el pensamiento crítico, la comunicación, la colaboración y la innovación. Además, Ecuador requiere trabajadores con alta capacitación que puedan afrontar problemas complejos, ciudadanos que puedan pensar, razonar y comprometerse de manera eficaz con la resolución de problemas cuantitativos (Smith y Stein, 2016).

En esta misma línea, se presentarán las sugerencias aportadas por instituciones profesionales tales como el National Council of Teacher of Mathematics (NCTM) (2015) en el libro *De los principios a las acciones: para garantizar el éxito matemático para todos*. Esta obra recomienda que la enseñanza de las matemáticas se haga de manera activa, que desarrolle una forma de pensar que pueda dar sentido al entorno y aplique toda la tecnología disponible. Esta visión actual de la comunidad internacional vinculada con la enseñanza de las matemáticas implica un cambio en su perspectiva: define a disciplina como una actividad social y cultural, en la que el conocimiento no se descubre, sino que se construye a partir de la experimentación, formulación, contrastación y justificación de conjeturas. Así mismo, promueve mirar el entorno desde un punto de vista matemático para buscar patrones y regularidades en las situaciones problemáticas.

Desde esta mirada, el capítulo presentará al nuevo enfoque de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas denominado método Abierto Basado en Números o método ABN, creado por Jaime Martínez Montero (2000, 2008, 2010) a fines de la primera década del siglo XXI. Fue presentado en el VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM, 2017) desarrollado en Madrid. Los estudios empíricos muestran diferencias significativas cuando los estudiantes llegan a la resolución de problemas y este método pone eso en práctica. Hay diferencias que se observan con estudiantes que aprenden con el algoritmo tradicional Cerrado Basado en Cifras (CBC) y los que aprenden con el método ABN cuando llegan a la resolución de problemas (Aragón et al., 2017; Martínez, 2011). Es decir, el método ayuda a que los estudiantes consigan un logro superior con respecto a lo que aprenden con el método tradicional.

El método empezó a aplicarse en las unidades educativas de Cádiz, España. En menos de diez años se extendió en gran parte de España, luego llegó a países hispanoamericanos como Argentina, México, y Chile (Aragón et al., 2017), y a Ecuador. Las Figuras 1 y 2 ilustran su presencia en España y en el mundo, respectivamente.

Figura 1. El uso del método ABN en Europa



Fuente: Elaborado por Actiludis

Figura 2. El uso del método ABN en América



Fuente: Actiludis

Como se puede observar en la Figura 1, la incorporación del método ABN está creciendo en América, en particular en los países del sur. En Ecuador se viene utilizando desde el 2017 en el Centro de Apoyo de la Universidad Nacional de Educación-UNAE, en la ciudad de Lago Agrio, provincia de Sucumbíos, con profesores participantes de los cursos de Formación Continua y en el Programa de Profesionalización que oferta la UNAE. El método se ha incluido como uno de los temas en el módulo de Matemática, Geometría y Estadística: problematización y diversidad epistemológica. La UNAE lo empezó a utilizar en el 2018 con los estudiantes del séptimo ciclo de la carrera de Educación.

El método ABN ha alcanzado una mayor aceptación entre los estudiantes de Educación Básica Itinerario Pedagógico Académico de la Matemática y ha motivado a varios estudiantes a desarrollar temas de proyectos de integración de saberes (PIENSA). Tras trabajar con este método en las aulas de la UNAE, también se lo implementó como método de trabajo para la práctica preprofesional con estudiantes de Educación Básica, subnivel elemental y medio de

la Unidad Educativa Luis Cordero de la ciudad de Azogues. Varios estudiantes se han interesado en profundizar en sus fundamentos y en su aplicación y como resultado han presentado sus investigaciones en conferencias, seminarios, talleres, eventos académicos y científicos de alcance nacional e internacional, como en el IV COBISEMAT-2019 (Coloquio Binacional sobre Educación Matemática) organizado por la Universidad de Cuenca. También un docente fue invitado a presentar el método en la Conferencia Inaugural del I Encuentro Internacional de Jóvenes Investigadores en Educación Matemática, Matemática e Interculturalidad (Figura 3).

Figura 3. Conferencia sobre el método ABN en la Universidad Nacional de Educación, 2019



Fuente: Elaboración propia (2019)

A nivel internacional, el método ha sido expuesto en la Universidad del Pacífico de Buena Ventura, Colombia; Universidad Católica Boliviana de La Paz; Universidad Adventista de Bolivia y Universidad Simón I Patiño, Cochabamba, Bolivia. Este método despierta gran interés y motivación en los docentes y directivos de las diferentes unidades educativas.

A continuación, nos enfocaremos en explicar el método Abierto Basado en Números a fin de responder preguntas como: en qué consiste, cuáles son sus fortalezas, cuál es su diferencia con respecto

al algoritmo tradicional Cerrado Basado en Cifras y por qué se está expandiendo de forma tan vertiginosa.

2. Algunos antecedentes

La enseñanza y aprendizaje de las matemáticas han tenido siempre un lugar preeminente en la escuela, si bien tradicionalmente no ha sido la disciplina más popular entre los estudiantes, ha sido percibida como un saber de menor utilidad en la vida cotidiana, es la que más suspensos tiene en casi todos los países, es más, se la juzga como una materia asequible solo para alumnos aventajados, tanto que en algunos casos se la ha utilizado como medida de inteligencia de los estudiantes (Adamuz y Bracho, 2014; Martínez, 2010). Justamente por estas dificultades encontradas, la enseñanza de las matemáticas en los diferentes niveles ha sido y es fuente de preocupación para las instituciones, padres de familia y maestros.

Analizando la situación, se puede ver que el error es pensar que los problemas se deben a que el niño no *se le da bien* las matemáticas cuando lo que realmente ocurre es un problema de enseñanza: el método, la manera de enseñar ha impedido que su aprendizaje se convierta en algo más vivenciado y que el niño tome el protagonismo de su aprendizaje (Cano y Morín, 2016, p.5). John Megaton, en una entrevista, afirmó que “las matemáticas son fáciles, el problema es el método con que se enseña”. En realidad, las matemáticas son asequibles y su saber es imprescindible para la vida del ciudadano y para el desarrollo intelectual y humano.

Aunque las preocupaciones por la enseñanza de las matemáticas y por su mejora progresiva, son tan antiguas como la enseñanza misma y como la vida en sociedad, el estudio sistemático para localizar los fenómenos que la caracterizan tiene apenas unas cinco décadas (Cantoral y Farfán, 2003, p.28). Ya en 1971, Ablewhite advertía de los muchos problemas que se originaban en el aprendizaje de las operaciones y cómo los alumnos con dificultades sufrían en mayor medida por el método que se utilizaba (Martínez, 2011, p.95). A partir de esta preocupación, se ha estudiado y se han publicado trabajos de diferentes autores y escuelas que señalan las disfunciones y complica-

ciones derivadas del empleo de unos algoritmos muy poco adecuados para los sujetos a los que estaban destinados. Adamuz y Bracho (2014) explican parte del problema:

Maier (1987) afirmaba que el uso de las cuatro reglas de cálculo en la escuela era solo una cuestión de supervivencia escolar, es decir, se aprende para tener éxito en la escuela, y desde entonces han sido muchos los autores que nos han hablado del poco sentido pedagógico que tienen los algoritmos tradicionales hoy día y de los problemas derivados de su enseñanza (Baroody, 1988; Chamorro, 2005; Dickson, Brown y Gibson, 1991; Gómez, 1999; Martínez, 2011; Maza, 1989; NCTM, 2000), entre otros muchos; sin embargo en la mayoría de las escuelas se siguen enseñando las cuatro operaciones básicas de forma tradicional (p.41).

Cano y Morín (2016) añaden más información acerca de los problemas detectados:

Existen una serie de razones que plantean el porqué las matemáticas resultan difíciles de aprender (Oyaga, 2015; Resnik, 1990; Servais, 1980; Skemp, 1980;), esto se debe a su nivel de abstracción, su gran nivel de concreción y la necesidad de aprender bajo la guía de un maestro. No se puede echar la culpa en su totalidad a esta idea, sino, como señalamos anteriormente, debemos cambiar la forma en que se imparte esta materia, planteándose de una forma totalmente diferente (p.5).

En la actualidad, los niños siguen pasando muchas horas en la escuela y en la casa practicando matemáticas mediante procedimientos mecánicos y memorísticos que no entienden. Las investigaciones han demostrado que tiene más sentido dedicar tiempo en la escuela a enseñar a los niños a entender el porqué y el para qué las matemáticas desde un proceso constructivo y social que aprender procedimientos mecánicos.

2.1 Algoritmo Cerrado Basado en Cifras (CBC)

El algoritmo CBC fue diseñado por Leonardo de Pisa, conocido como Fibonacci (1175-1240), matemático italiano que difundió en Occidente los conocimientos científicos del mundo árabe. En 1202

publicó su obra más importante, el *Liber Abaci* (*El Libro del ábaco* o *el Libro de cálculo*) que popularizó el uso de cifras del sistema árabe. Fibonacci defendió apasionadamente el sistema indoarábigo, el que ahora todo Occidente utiliza, y trató de convencer a sus contemporáneos de las ventajas de usar los nuevos números, explicó su correcta utilización y sus ventajas para la contabilidad y el cambio de moneda.

Fibonacci es considerado como el primer algebrista de Europa cronológicamente hablando. Su padre, como ciudadano de la ciudad de Pisa, ocupaba un puesto importante como funcionario consular en la aduana de Bugia, en el norte de África (hoy Argelia). Allí Fibonacci tomó contacto por primera vez con la lengua árabe aritmética, en la tienda de un comerciante de especies, y con la numeración hindú posicional que incluía el 0 (cero), un sistema que los árabes habían adoptado de forma general y que era diferente de la numeración griega y la romana. Él se entusiasmó con este nuevo tipo de cálculo y se dedicó a instruirse aprovechando sus viajes: estuvo en Egipto, Siria, Grecia y Sicilia, lugares en los que pudo contactar con matemáticos árabes de su tiempo.

Reunió el material en el *Liber Abaci*, le dio un orden, unidad de método y claridad para su enseñanza. Por su caudal de ejemplos, sirvió como manual de aritmética para uso de los comerciantes. La obra expone nociones suficientes sobre el cálculo digital, tablas de adición y multiplicación, mostrando su uso para realizar las cuatro operaciones con cifras de considerable extensión. El libro fue ampliado en una segunda redacción en 1228.

A partir de ese momento, comenzó una larga discusión entre los defensores de cada sistema de numeración: los llamados abacistas o partidarios del ábaco y los de la vieja notación romana, los algoristas, entusiastas del nuevo y revolucionario método. Con todo esto, se tuvo que esperar más de 300 años, hasta bien entrado al siglo XVI, para que el nuevo sistema de numeración se hiciera universal y se empezara a utilizar.

En el campo de la educación matemática actual, por muy variados que sean los recursos didácticos y las técnicas de enseñanza utilizadas, el sistema de numeración decimal-posicional constituye un problema para los estudiantes porque ellos no llegan a comprender bien las

reglas del sistema, lo que ocasiona dificultades en la operatoria, ya que no logran visualizar la relación entre organización del sistema y los algoritmos convencionales de las operaciones.

2.2 Dificultades en el aprendizaje del algoritmo CBC

La presentación del número a través del algoritmo tradicional CBC implica para el niño dificultades que se agravan al iniciar su aprendizaje en edades tempranas. Como señala Kamii (1986): “la enseñanza prematura, sea del valor de la posición o de cualquier otro aspecto del programa de estudios, es perniciosa para la comprensión de una disciplina por parte de los niños” (p.71).

Consideremos las operaciones de suma, resta y multiplicación con el algoritmo CBC:

3456	8456	3456
+ 4678	+ 4638	x 0034
8134	3818	1384
		<u>10368</u>
		117504

El primer problema para el aprendiz es que los números se escriben de izquierda a derecha, pero las operaciones de suma, resta y multiplicación se realizan en sentido contrario, de derecha a izquierda. Para el adulto que lo ha utilizado por años, parece normal, pero para el niño que está aprendiendo esto es un problema.

De igual modo, cuando se realiza la suma de dos números con más de dos cifras, como se muestra en el ejemplo, se deben sumar las unidades cinco y seis, se obtiene 11 (5+6=11) y se lleva 1. Pero, cuando sumamos las segundas cifras que son 4 y 8 (4+8=12), no se está sumando números, sino cifras, porque sumando como números sería 48 (40+80=120), y el resultado es 120.

$$\begin{array}{r}
 2345 \\
 + 4786 \\
 \hline
 7131
 \end{array}$$

En el caso de la resta también se procede de la misma manera. Incluso se utiliza el término *presto*, que nunca se *devuelve*. Para la multiplicación se enseña a los niños a dejar un espacio, pero sin ninguna explicación. Al multiplicar por las decenas no habría la necesidad de dejar espacio, sino que se completaría con el cero.

El algoritmo CBC resulta complicado porque fue creado para resolver cálculos de adultos, para resolver problemas financieros, administrativos, contables de empresas y no para atender problemas de aprendizaje ni para potenciar las capacidades y habilidades del niño. En aquella época se buscaba formar personas que fueran capaces de resolver las operaciones de una forma ágil, sin cometer errores, porque no se contaba con las tecnologías actuales como las calculadoras científicas, ordenadores o celulares. Otro problema es que guarda poca relación con las actividades de la vida real, por ejemplo, en la práctica cotidiana, cuando se tienen billetes de diferentes valores 100, 50, 20, 10, etc., se suelen contar desde el número mayor hasta el menor; en cambio por ese algoritmo la suma se enseña comenzando por los menores. Finalmente, el algoritmo CBC implica un proceso memorístico, mecánico y de proceso único que fue importado a la escuela tal como estaba estructurado.

La presentación cerrada y acabada a través del algoritmo CBC que siguen los libros de texto oculta el zigzagueante camino de los procesos matemáticos, lo que no estimula el desarrollo del pensamiento crítico ni los valores científicos en el aprendiente. Además, las exigencias del currículo escolar tradicional obligan a cumplir un programa compacto dentro del marco cerrado de la asignatura, lo que no propicia ese encanto por las matemáticas al tiempo que genera un proceso de aprendizaje mecánico y memorístico de algoritmos, reglas o fórmulas.

Afortunadamente, en el siglo XXI, la didáctica de la matemática ha retomado teorías anteriores para redefinirlas en un marco nuevo en el que el estudiante es el protagonista de su aprendizaje y el docente su acompañante en ese proceso educativo. De ese modo, los resultados ayudan a entender el proceso de aprendizaje de los niños considerando que las matemáticas son fundamentales en el desarrollo intelectual y humano de la persona porque le permiten desenvolverse de forma eficiente en una sociedad de avance progresivo de la ciencia y la tecnología.

El método ABN implica nuevas formas de aprender, desaprender y reaprender; invita a descubrir y redescubrir el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de forma motivadora y creativa. Su objetivo es desarrollar en el estudiante las competencias matemáticas para identificar y entender la función que desempeña en el mundo, emitir juicios fundamentados y relacionarse con las matemáticas de forma que puedan satisfacer sus necesidades y actuar como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos. En definitiva, se trata de un método innovador, que respeta el ritmo de aprendizaje del estudiante y logra motivarlo a que presente una actitud positiva hacia las matemáticas.

2.3. Algoritmo Abierto Basado en Número (ABN)

El método ABN se enmarca en el enfoque de la Educación Matemática Realista (EMR), que considera al aprendizaje de las matemáticas como una actividad: se aprende matemáticas haciendo matemáticas. Implica un método de cálculo escrito y mental que el niño aprende de forma natural, intuitiva, creativa, dinámica, con situaciones cercanas y materiales tangibles y manipulables. Respeto el ritmo de aprendizaje del niño, pues busca que este entienda y comprenda los pasos del proceso, que no calcule mecánicamente, que desarrolle su capacidad intelectual y su competencia matemática. De ese modo, por un lado, rompe en muchos aspectos con el método tradicional de CBC, cerrado, con una única respuesta posible, que propugna el aprendizaje mecánico de las operaciones. Por otro lado, mejora el rendimiento matemático en cuanto al cálculo mental, operaciones y resolución de problemas y toma de decisiones.

Los principios en los que se basa el método son los siguientes:

- a. *Principio de igualdad*: no existe un gen matemático que sea poseído por algunos niños y no por otros; ni siquiera se ha localizado el gen que predisponga al aprendizaje. No hay personas “negadas” para las matemáticas, aunque es cierto que ciertas personas aprenden mejor y más rápido que otras. En todo caso, con ayuda, todos pueden lograr una competencia matemática aceptable.

- b. *Principio de la experiencia*: no se puede suprimir la experiencia de aprendizaje, por ello, la escuela debe proporcionar ricas experiencias, con el fin de que el niño pueda construir el saber matemático sobre la base de lo que ya conoce. Las matemáticas son muy abstractas, por eso es importante darle sentido concreto con manipulación de objetos tangibles.
- c. *Principio de la transferencia*: se muestran todos los pasos que se siguen, sin ocultar nada al niño y dando significado a todo lo que realiza, de forma que conozca en todo momento lo que está haciendo en el proceso de resolución.
- d. *Principio de adaptación al ritmo de aprendizaje individual*: la estructura del método ABN es muy flexible, cada niño puede efectuar sus cálculos a un ritmo individual. No es racional que todo el alumnado efectúe el cálculo del mismo modo y al mismo tiempo.
- e. *Principio de autoaprendizaje y autorregulación*: el niño es consciente de los pasos que va desarrollando y tiene control sobre ello, puede agrupar o desdoblar los cálculos y mejorarlos en la medida en que va comprendiendo y asimilando lo que va haciendo.

Otra ventaja del método es que puede ser aplicado y trabajado por profesores de diferentes niveles: infantil, primario y secundario. En tal sentido, se puede considerar como un método propicio a los nuevos tiempos en los que los cambios frenéticos han modificado las necesidades de aprendizaje que se tenían décadas atrás (Bracho, 2013; Martínez, 2010).

a) Acción de contar

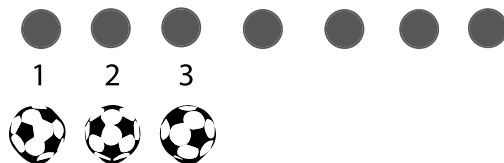
Según Martínez (2010), “la numeración es, sin duda, uno de los elementos matemáticos que más se desaprovechan en la escuela” (p.63), su proceso de aprendizaje es bastante débil e incompleto, muy centrado en la única capacidad de reconocer y escribir grafismos (símbolos), con muy escasos ejercicios de composición y descomposición. Como es muy importante que los más pequeños asimilen las nociones esenciales para adquirir una base sólida para su recorrido

académico, personal y profesional, los primeros cálculos que realicen son ejercicios claves en su aprendizaje de las matemáticas. Más allá de memorizar, los niños deben desarrollar un razonamiento lógico para ser capaces de encontrar o generar respuestas adecuadas a un problema dado. Sin embargo, en nuestro sistema educativo no se presta la debida atención al proceso de contar (o conteo) ni al desarrollo del sentido numérico en el niño.

A menudo, cuando niños de 2 o 3 años son capaces de recitar los números del 1 al 10, sus padres presumen que ya saben contar. Sin embargo, cuando estos niños tienen delante un montón de manzanas y empiezan a contarlas, no dicen un número por cada manzana. Unas veces señalan varias manzanas entre un número y el siguiente, y otras veces dicen varios números para una misma manzana. Estos niños han aprendido de memoria una secuencia de palabras, pero están lejos de saber contar, pues para saber contar debe desarrollarse primero el concepto de correspondencia de uno a uno. Es decir, aprender a contar significa que a cada objeto le corresponde una única palabra (número), por ejemplo, 1 al primer objeto, 2 al segundo objeto, 3 al tercer objeto y así sucesivamente, hasta que se acaban todos los objetos que queremos contar.

La representación figurativa se refiere al hecho de que el alumno puede reconocer conjuntos representados con una clara referencia a su naturaleza, por ejemplo, si en una lámina existen tres balones de fútbol será capaz de contarlas al igual que lo haría si contase tres balones reales. La idea se explica en la Figura 4.

Figura 4. Representación figurativa

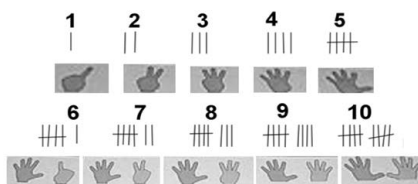


Fuente: Elaboración propia

Para llegar a la correspondencia uno a uno se requiere coordinar dos procesos previos: la partición y la etiquetación. La primera

corresponde a la capacidad de separar los objetos en dos categorías (contados y no contados); la segunda es la capacidad para identificar la secuencia de los números (1, 2, 3...) y asignarle un número a cada elemento del conjunto (ver Figura 5).

Figura 5. La correspondencia uno a uno



Fuente: Elaboración propia

El aprendizaje de un sistema de numeración no es algo fácil, sino una tarea que se puede encontrar erizada de dificultades. El niño suele aprender los nueve primeros números y el cero en el último año de la Educación Infantil, y se introduce en los números siguientes y en el sistema de agrupación y representación en el primer curso de Educación Básica. Solo un par de cursos después es frecuente observar a alumnos que son capaces de escribir números representados por un alto número de cifras. En términos generales, se ha instalado en las escuelas de educación infantil que los niños no pasen del número nueve en sus ejercicios de numeración y en sus actividades de contar. Basadas en esta creencia, las diversas editoriales que proveen de textos a este sector, incluyen en sus libros de textos y fichas de trabajo ejercicios en los que los números nunca llegan a 10.

Causa asombro el grado de unanimidad que tal creencia ha suscitado entre los profesores de educación infantil. Tal limitación en el aprendizaje deriva en situaciones curiosas, por ejemplo, la del niño que cuenta con los dedos y que no sabe por qué deja siempre sin utilizar y sin contar el dedo meñique de una mano, puesto que no pasó del 9 en la educación infantil. Esto ya comienza a sembrar dificultades en el camino de aprendizaje de la numeración. Esta práctica, en consecuencia, exige un nivel de elaboración simbólica y de abstracción demasiado elevada para un niño de 4 o 5 años. Según Martínez (2010,

p.63), es mejor esperar un mayor nivel de maduración para adentrarse en estos niveles mentales más escurridizos.

El problema de la decena no se percibe cuando se cuenta con los dedos. Se da el supuesto de que todas las cantidades se representan con una estructura isomorfa o que simbolizan directamente al sistema de escritura de la numeración en base 10. Si el niño cuenta los 10 dedos no encuentra la diferencia entre el dedo 9 y el dedo 10, solo lo hace cuando tiene que expresar ese número con cifras. La palabra *diez* no es tan simple, además, en los nombres de los números aparece la referencia a la decena a partir del dieciséis y no antes; esto no ocurre en otras lenguas como el aymara (1 = *maya*, 2 = *paya*, 3 = *kimsa*, 4 = *pusi*, 5 = *phisqa*, 6 = *suxta*, 7 = *paqalqu*, 8 = *kimsaqalqu*, 9 = *llatinka* y 10 = *tunka*), en la que a partir de 10 se coloca la palabra *tunka* y la unidad.

Por ejemplo, 11 es *tunka mayani*, 12 es *tunka payani*, así sucesivamente; 30 es *kimsa tunka*.

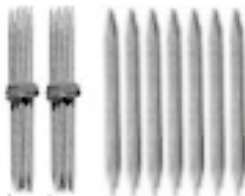
Muchas de las tareas que se hacen en la clase pueden ser aprovechadas para reforzar el dominio de la numeración y, en este caso, la tarea de contar. Por ejemplo, podría encargarse a un niño el control de la asistencia, al contar a los estudiantes presentes podría deducir el número de estudiantes que faltan. También se les podría pedir a los niños que hagan un inventario de los materiales de la clase, para ellos tendrán que contar las mesas, las sillas, los libros, los lápices, etc.; además de contar, se percatarán si hay o no recursos para todos, cuántos deben compartir una determinada cosa u objeto.

Según Martínez (2010, p.61), el proceso de comprensión de agrupación en unidades de orden superior no se alcanza hasta una edad más elevada que la que corresponde al primer año de educación básica. Pero esto no significa que el niño no sepa escribir numerosos dígitos correctamente (por imitación, por interiorización de reglas a las que no les confiere sentido). De hecho, que el niño sea capaz de reproducir exactamente lo que el profesor le ha indicado no quiere decir que comprenda perfectamente lo que está haciendo.

Para la introducción de la decena a los niños, se recomienda utilizar material concreto de acuerdo con la edad y nivel de aprendizaje y reforzar la representación de los números de forma concreta agrupándolos de 10 en 10. Por ejemplo, para representar el número 27

tenemos dos grupos de 10 unidades que son equivalentes a 20 unidades y 7 unidades tal como se explica en la Figura 6.

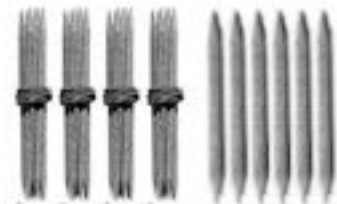
Figura 6. Representación de decenas y unidades



Fuente: Benito (2015)

Para representar 46, necesitamos 4 grupos de 10 unidades y 6 unidades, como se muestra en la Figura 7.

Figura 7. Representación de decenas y unidades



Fuente: Benito (2015)

La dificultad que entorpece el proceso de enseñanza-aprendizaje de la numeración y de las operaciones básicas es que muchas veces se busca enseñar el tema desde la rigidez del sistema de numeración, lo que desfigura las realidades que presenta, infortunadamente el problema de fondo ha pasado desapercibido por los maestros e investigadores.

b) Suma o adición

En la mayor parte del sistema escolar y en casi todos los materiales escolares, la operación de la suma aparece concretada

bajo la forma del algoritmo CBC, un algoritmo de llegada, resumen, síntesis de pasos y procedimientos minuciosos con los que los alumnos deben iniciarse y poner en marcha sus potencialidades a la hora de resolver operaciones. En cambio, el algoritmo ABN de la suma toma como referencia el manejo de números y no la combinación de cifras; por su propio diseño elimina la mayor parte de las dificultades que plantea la operación de sumar en su forma tradicional.

El meollo de la *suma o adición* es que hay que acumular un sumando en el otro. Una vez que esté totalmente acumulado, el nuevo sumando nos dará el resultado. Con el método tradicional, el estudiante tiene que descomponer en unidades, decenas, centenas y a partir de ahí juntar los iguales y sumarlos de derecha a izquierda teniendo en cuenta las *llevadas*. Las cuentas se realizan de forma mecánica y no hay posibilidad de saltarse esta regla. Además, es contraria a la forma como lee nuestra mente, por lo que se vuelve más difícil para el niño.

Con el método ABN, el niño se siente motivado y con una actitud positiva, ya que trabaja con una metodología que lo impulsa a resolver las operaciones de una forma más fácil y menos mecánica, lo que le sirve para ir interiorizando el saber matemático de forma comprensiva, significativa y creativa. Se debe empezar a trabajar los números amigos, es decir, los complementos de los números, por ejemplo, lo que nos hace falta para completar la decena de un número: el número amigo de 7 es 3 porque juntos completan la decena; el número amigo de 2 es el 8 porque juntos completan la decena, y así, sucesivamente.

Soraya tiene 46 dólares y su tía le ha regalado 27 más por su cumpleaños ¿Cuántos tiene ahora?

El estudiante elige el número que desea agregar. Por ejemplo, si elige agregar primero 10 dólares y así, obtenemos $46+10$ igual a 56 dólares, luego agrega otros 10 dólares y obtiene $56+10$ igual a 66 dólares, y para completar los 70 dólares agrega 4. Finalmente agrega los 3 y obtiene 73 dólares. Esta es una alternativa, pero cada estudiante tiene la libertad de elegir el número o la cantidad que desea agregar de acuerdo con su ritmo o capacidad de hacer las operaciones. En una clase de 20 estudiantes podría haber 20 procesos diferentes como se indica en la Tabla 1.

Tabla 1. Operación de la suma con el método ABN

27+46 =73		
Agrego	Queda	Resulta
4	23	50
10	13	60
10	3	70
3	0	73

Fuente: Elaboración propia

La Tabla 1 se simplifica en la medida que los niños se acoplan a la metodología. En el formato evolucionado ya no aparece la cabecera de las columnas, tampoco el número de filas. Así, poco a poco los niños serán capaces de prever el número de filas según el número de veces en que resolverá la operación. Por ejemplo, después de los primeros aprendizajes el formato quedaría como lo indica la Tabla 2.

Tabla 2. Operación de la suma con el método ABN

27+46 =73		
Agrego	Queda	Resulta
4	23	50
10	13	60
10	3	70
3	0	73

Fuente: Elaboración propia

Si pasamos a tres cifras, se transformarán hasta las centenas, tal como explica la Tabla 3.

María Luisa es una niña muy juiciosa y ha conseguido ahorrar 349 dólares durante el año y su abuela le ha regalado 118 más por su cumpleaños ¿Cuántos tiene ahora?

Tabla 3. Operación de la suma con ABN

118+349=467		
Agrego	Queda	Resulta
100	18	449
10	8	459
1	7	460
7	0	467

Fuente: Elaboración propia

Como ya se indicó, el niño es libre para elegir la cantidad que considera conveniente. Pero no es la única alternativa, cada niño avanza de acuerdo con su ritmo.

El empleo de este formato supone un cambio importante en el modelo de chip: se deja de trabajar con cifras y se realiza los cálculos con números, lo que supone trabajar la tabla de sumar teniendo en cuenta esta característica. Tenerla en cuenta esto significa que lo que el alumno sabe hacer con las unidades (combinar tres con nueve, por ejemplo) ha de saber hacer con las decenas (treinta con noventa) o con centenas (trescientos con novecientos). La extensión de este conocimiento de las tablas a los nuevos órdenes es algo muy sencillo para el niño y lo hace en poco tiempo, sin demasiado entrenamiento y con mucha exactitud.

c) Resta o sustracción

Debemos recordar que aprender esta operación es más difícil para el niño, pues abarcamos con ese nombre operaciones diversas, pero que admiten un procedimiento común de resolución. Cada modelo, según Martínez (2010), conlleva manipulaciones muy distintas, por lo que aplicar el mismo algoritmo a todos supone un proceso de abstracción que no es sencillo llevar a cabo. Cuando nos referimos a la resta, casi todos pensamos en una cantidad determinada de la que quitamos otra. No hay más que un número, y el que debemos quitar no está en ninguna parte, sino en nuestra cabeza. Los procesos de restar (que tienen como soporte este modelo) parecen los más sencillos:

quitar, gastar, entregar, perder, etc. Sin embargo, cuando queremos que el niño resuelva este problema manipulativamente, con apoyo de material concreto y numérico, nos damos cuenta de que es de los más difíciles porque tiene que quitar un número que solo está en la cabeza y apenas dispone de apoyo empírico para las descomposiciones que debe efectuar.

Según Martínez (2010, p.241), los problemas de la resta son numerosos y bastante diferentes, pese a que todos ellos se resuelven con la misma operación. Incluso, señala que existen trece problemas distintos de restas, pero por la manipulación se reducen a cuatro tipos:

- *Detracción*: a una cantidad, quitar una indicada y contar lo que queda.
- *Escalera ascendente*: se parte de una cantidad a la que hay que añadir para llegar a la otra.
- *Escalera descendente*: se parte de una cantidad a la que hay que quitar para llegar a la otra.
- *Comparación*: hay que buscar, por cuanto una cantidad es mayor o menor que otra.

A continuación, se presentan ejemplos de cada tipo.

Manipulación por comparación: $A-B=C$

En este tipo de problemas se comparan dos cantidades conocidas, el mayor y el menor, y se pregunta por la diferencia.

Juan tenía 326 dólares ahorrados y ha gastado 128 en comprar regalos para su madre. ¿Cuánto dinero le queda?

Para resolver el problema mediante el método ABN, se van quitando cantidades del minuendo y sustrayendo, hasta agotar el sustraendo. Este proceso se representa en tres columnas, en la primera se refleja la cantidad que se va quitando de las otras dos y en la segunda y tercera se indica las cantidades del minuendo y sustraendo debajo de las cantidades que resultan tras quitar la de la primera columna, tal como se observa en la Tabla 4.

Tabla 4. La resta con el método ABN

326-128=198		
Quito	Cantidad mayor	Cantidad menor
100	226	28
20	206	8
6	200	2
2	198	0

Fuente: Elaboración propia

Otro problema que resolver con el método ABN por comparación sería:

En la Unidad Educativa República del Ecuador de la ciudad de Cuenca hay 746 niñas y 325 niños ;Cuántos niños menos hay? Observar la Tabla 5.

Tabla 5. La resta con el método ABN

746-325 = 421		
Quito	Cantidad menor	Cantidad mayor
300	25	446
20	5	426
5	0	421

Fuente: Elaboración propia

Para un adulto, los números pueden representar en su mente la cantidad real a la que se refieren, pero los niños carecen de esa experiencia.

Manipulación en escalera ascendente: $A+X=C$

Es un tipo de sustracción no común en los libros de texto y cuadernos de trabajo de los alumnos, pero sí en los problemas y situaciones de la vida diaria. Se da cuando se parte de una cantidad y se necesita ir añadiendo hasta llegar a otra mayor, que sabemos cuál es. Por ejemplo:

Cuando empezó la fiesta de cumpleaños había 12 niños y cuando acabó había 25. ¿Cuántos niños se incorporaron a la fiesta?

Para resolver el problema mediante el método ABN, solo necesitamos dos columnas, en la primera se coloca la cantidad que se va poniendo (añado) y en la segunda (llego a) iremos poniendo las sumas parciales que alcanzamos al añadirle al sustraendo las cantidades que cada uno va poniendo, hasta llegar a la cifra del minuendo. Luego se sumarán las cantidades de la primera columna, lo que será el resultado, como se puede observar en la Tabla 6.

Tabla 6. Operación de la resta con el método ABN

25-12=13	
Añado	Llego a
2	14
6	20
5	25
13	

Fuente: Elaboración propia

Podría parecer un problema incongruente por cuanto tiene el sentido de crecer y aumentar, sin embargo, se resuelve con la sustracción. Se trata de una situación muy familiar al estudiante, por lo que no conlleva demasiadas dificultades.

Manipulación en escala descendente $A-X=C$

Es la situación inversa a la manipulación en escalera ascendente, por lo que mucho de lo señalado es aplicable aquí. La mayor diferencia con respecto al caso anterior es una mayor congruencia con el sentido de la operación de la resta. Para esto se considera el siguiente ejemplo:

En una cesta había 28 plátanos y después de merendar había 15. ¿Cuántos plátanos se han comido?

Para comprender el proceso, se puede observar la Tabla 7.

Tabla 7. La resta con el método ABN

28-15=13	
Quito	Llego a
3	25
5	20
5	15
13	

Fuente: Elaboración propia

Manipulación por detracción: $A-B=X$

Parece el modelo más sencillo. Es el más representado y el que proporciona más ejemplos de problemas escolares. De alguna forma, se emplea como prototipo de la resta. Por ejemplo:

En una pastelería de Lago Agrio se han elaborado 347 empanadas de las cuales se han vendido 246 por la mañana. ¿Cuántas empanadas quedan para la tarde?

En las restas se transfiere fuera (quitando de ambas cantidades el número fijo de la izquierda). Por ejemplo, si se quita 200, se obtiene una operación equivalente $147-46$, luego se quita 6 y se tiene $141-40$ y, finalmente, se quita 40 y se obtiene $101-0$, que es igual a 101, como se observa en la Tabla 8.

Tabla 8. La resta con el método ABN

347-246=101		
		Restan
200	46	147
6	40	141
40	0	101

Fuente: Elaboración propia

Como se ve en la tabla, estamos ante un problema inverso a la comparación.

d) Multiplicación o producto con el método ABN

El nuevo formato ABN supone una transformación radical del algoritmo tradicional. Tanto en la apariencia como en la esencia de los cálculos, poco tiene que ver con el CBC. Según Martínez (2010, p.151), es más transparente, posee más sentido, guarda más relación con las manipulaciones que se llevan a cabo con objetos reales cuando se multiplica una cantidad y, sobre todo, permite un control de los cálculos, completamente imposible con el algoritmo CBC.

La multiplicación en ABN se basa en la aplicación de una propiedad muy poco utilizada en la operatividad básica de las matemáticas, la propiedad *distributiva*. Por ejemplo, para multiplicar dos números sencillos (56×7) puede hacerse por el algoritmo tradicional, o bien aplicando la propiedad distributiva que siempre será más intuitiva. Al descomponer 56 en decenas y unidades se tiene $50+6$, por lo que esta operación será más fácil así:

$$(50 + 6) \times 7 = 50 \times 7 + 6 \times 7 = 350 + 42 = 392$$

Es decir, el 50 por 7, el 6 por 7 y se suman fácilmente ambos productos parciales. Habitualmente se denomina al primero multiplicando (56) y al segundo multiplicador (7).

Para efectuar esta operación con el método ABN, se la traslada a la Tabla 9, luego se descompone el multiplicando en vertical y el multiplicado en horizontal. Por ejemplo, para multiplicar 56×7 .

Tabla 9. La multiplicación con el método ABN

56x7=392		
Multiplicando en unidades	Suma de productos parciales	
7		
50	350	
6	42	392

Fuente: Elaboración propia

El ejemplo presentado fue con dos y una cifra. En la Tabla 10 se puede observar con tres y una cifra.

Tabla 10. La multiplicación con el método ABN

345x8=2760		
Multiplicando en unidades	Suma de productos parciales	
8		
300	2400	
40	320	2720
5	40	2760

Fuente: Elaboración propia

En la Tabla 11 se observa con dos y dos cifras.

Tabla 11. La multiplicación con el método ABN

58x24=1392				
Multiplicando descompuesto en unidades	Multiplicador por decenas	Multiplicador por unidades	Productos parciales	Producto acumulado
	20	4	1200	
50	1000	200		
8	160	32	192	1392

Fuente: Elaboración propia

En la Tabla 12 se presenta con tres y dos cifras.

Tabla 12. La multiplicación con el método ABN

364x25				
Multiplicando en unidades	Productos parciales	Productos parciales	Productos acumulados	Productos acumulados
	20	5	7500	
300	6000	1500		

60	1200	300	1500	9000
4	80	20	100	9100

Fuente: Elaboración propia

e) División o cociente en ABN

Para dividir con el método ABN se requiere un gran dominio de las operaciones suma, resta y multiplicación. Los términos de la división son el dividendo y el divisor, pero se recomienda explicar el concepto de la aproximación secuencial al dividendo mediante productos que contengan al divisor. En la Tabla 13 se ejemplifica la operación con dos y una cifra.

Tabla 13. Operación de la división con el método ABN

	88	:	7	
	Dividendo	Dividendo resultante	Cocientes parciales	
	88	70	10	
	18	14	2	
Resto	4		12	Resultado

Fuente: Elaboración propia

Nota. El dividendo (88), el divisor (7), el cociente (12) y el resto (4).

Con tres y dos cifras se aumenta el número de cifras como se ha hecho en la multiplicación. Para efectuar una división de 674 entre 56 se hace una aproximación como se muestra a continuación. Aunque se podría hacer arbitrariamente, es mejor a través de las siguientes aproximaciones: 52 por 2 es igual a 104; 52 por 5 es 260; y 52 por 10 es 520. También si fuera necesario hacer por 20, 50 y 100, etc. Para comprenderlo mejor, se puede observar la Tabla 14.

674: 52

$$52 \cdot 2 = 104 \quad 52 \cdot 20 = 1040$$

$$52 \cdot 5 = 260 \quad 52 \cdot 50 = 2600$$

$$52 \cdot 10 = 520 \quad 52 \cdot 100 = 5200$$

Tabla 14. La división con el método ABN

674	:	52
Dividendo	Dividendo resultante	Cocientes parciales
674	520	10
154	104	2
50		12

Fuente: Elaboración propia

Nota. El dividendo es 674, el divisor 52, el cociente 12 y el resto 50.

Con cuatro y dos cifras se puede hacer los que se indica en la Tabla 15.

$$5396 \div 58$$

$$58 \cdot 2 = 116 \quad 58 \cdot 20 = 1160$$

$$58 \cdot 5 = 290 \quad 58 \cdot 50 = 2900$$

$$58 \cdot 10 = 580 \quad 58 \cdot 100 = 5800$$

Tabla 15. La división con el método ABN

5396	:	58
Dividendo	Dividendo resultante	Cocientes parciales
5396	2900	50
2496	1160	20
1336	1160	20
176	116	2
60	58	1
2		93

Fuente: Elaboración propia

Nota. El dividendo es 5396, divisor 58, cociente 93 y resto 2.

La forma de realizar la operación con cinco y dos cifras se puede observar en la Tabla 16.

$$59831 \div 28$$

$$28 \times 2 = 56, 28 \times 20 = 560, 28 \times 200 = 5600.$$

$$28 \times 5 = 140, 28 \times 50 = 1400, 28 \times 500 = 14000.$$

$$28 \times 10 = 280, 28 \times 100 = 2800, 28 \times 1000 = 28000.$$

Tabla 16. La división con el método ABN

59831	:	28
Dividendo	Dividendo resultante	Cocientes parciales
59831	28000	1000
31831	28000	1000
3831	2800	100
1031	560	20
471	280	10
191	140	5
51	28	1
23		2136

Fuente: Elaboración propia

En cada una de las operaciones se parte de un problema, estos pueden ser adaptados o tomados del contexto del estudiante, pero siempre de acuerdo con su nivel de aprendizaje. La ventaja es que permiten pasar por las cuatro fases del aprendizaje de las matemáticas: concreto, semiconcreto, simbólico y abstracto.

4. Conclusiones

Tras revisar la literatura disponible y observar varios videos, blogs y documentos sobre la implementación del método ABN y tras experimentar el uso del método en cursos de formación continua para profesores en servicio y con estudiantes de la carrera de Educación Básica en la Universidad Nacional de Educación UNAE, se concluye que el método Abierto Basado en Números es un modelo de aprendizaje

natural, dinámico, abierto, creativo y bastante completo. Entre sus fortalezas están que ayuda al estudiante a interiorizar las matemáticas de forma lúdica y creativa, mostrando diferentes caminos para resolver una operación y creando una actitud positiva hacia ellas. Esto contrasta con el formato tradicional que fue creado para resolver cálculos de estimación y transacción con el propósito de llevar la contabilidad de empresas y administraciones, y no para atender la psicología del niño ni con el afán de conseguir mayor desarrollo intelectual.

El formato tradicional que se ha enseñado y se sigue enseñando está basado en cifras y no en números. El algoritmo CBC impulsa el aprendizaje memorístico, mecánico y reproducido en el examen. En cambio, el método ABN se basa en números propiciando en el estudiante un ámbito natural, intuitivo con referentes concretos semiconcretos y simbólicos para llegar a la abstracción del pensamiento matemático. Así, el método ABN es coherente con los enfoques constructivistas y está en correspondencia con el Modelo Pedagógico de la UNAE que da protagonismo al estudiante en su aprendizaje y que concibe al docente como un facilitador.

En la actualidad se considera que la potencialidad del aprendizaje de las matemáticas no está en la capacidad de hacer los cálculos de operaciones, sino en la capacidad de comprender el proceso a través de diferentes representaciones, así como de relacionar y transformar una representación en otra. También se pretende formar ciudadanos con la capacidad y habilidades de resolver problemas y tomar de decisiones complejas y desconocidas. Además, los requerimientos actuales de la sociedad son distintos y requieren competencias matemáticas para resolver problemas de la vida cotidiana de forma creativa y proponer alternativas de solución que potencien las habilidades matemáticas, sociales y epistemológicas de los educandos.

El método se encuentra en un proceso de implantación, por eso aún no se cuenta con una evaluación cuantitativa, con datos que evidencien su funcionalidad en los niños ecuatorianos. En otros países ya se han realizado estudios al respecto y los resultados demuestran las ventajas del método en relación con los niños que aprenden con el algoritmo CBC. Sin embargo, algunos profesores y estudiantes se muestran resistentes al cambio porque no quieren salir de su zona

de confort y argumentan que este método solo se puede utilizar en la educación básica, por lo que el estudiante, cuando avance al ciclo medio, deberá ajustarse y reaprender las operaciones con el algoritmo CBC; otros consideran que el método solo sirve para las operaciones aritméticas y no para la resolución de otro tipo de operaciones. La postura es entendible porque todos fuimos formados con el algoritmo CBC y cuesta introducir alternativas creativas.

Profesores y estudiantes deberían implementar el método en el proceso de enseñanza-aprendizaje por las ventajas alegadas: ayuda a comprender el proceso de las operaciones con lo que genera una actitud positiva hacia las matemáticas y la vida, a diferencia del CBC que ha creado una imagen negativa de la disciplina, tal como se refleja en los resultados de las evaluaciones nacionales e internacionales. Investigadores y profesores interesados en mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje deberían implementar el método ABN y avanzar con propuestas y estudios para su análisis sistemático.

Referencias bibliográficas

- Ablewhite, R. (1971). *Las matemáticas y los menos dotados*. Morata.
- Actiludis (2015). *Añadir ubicación al mapa de centros ABN*. <https://cutt.ly/1vAYOyM>.
- Adamuz, N. y Bracho, R. (2014). Algoritmos flexibles para las operaciones básicas como modo de favorecer la inclusión social. *Revista Internacional de Educación para la justicia social*, 3(1), 37-53.
- Aragón, E., Delgado, C. y Marchena, E. (2017). Diferencias de aprendizaje matemático entre los métodos de enseñanza ABN y CBC. *Psychology, Society & Education*, 9(1), 61-70.
- Benito, M. (2015). *El método ABN. Algoritmos Abiertos Basados en Números* [Trabajo de fin de grado]. Universidad de Valladolid.
- Bracho, R. (2013). *Menos reglas más sentido: Alternativas metodológicas a los algoritmos de cálculo tradicionales para el desarrollo del sentido numérico en la educación primaria*. CIBEM.
<http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/301.pdf>.
- Cano, C. y Morín, C. (2016). *La enseñanza de las matemáticas mediante el método algoritmo ABN en el segundo ciclo de Educación Infantil*. [Trabajo de fin de grado]. Universidad de La Laguna.
- Cantoral, R y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: una visión de su evolución. *Relíme*, 6 (1), 27-40.
- Kamii, C. (1986). *El niño reinventa la aritmética*. Nueva Paideia.
- Martínez, J. (2000). *Una nueva didáctica para el siglo XXI*. CISS-Praxis.
- Martínez, J. (2008). *Competencias básicas en matemáticas. Una nueva práctica*. Wolters Kluwer.
- Martínez, J. (2010). *Enseñar matemáticas a alumnos con necesidades educativas especiales*. Wolters Kluwer.
- Martínez, J. (2011). El método de cálculo Abierto Basado en Números (ABN) como alternativa de futuro respecto a los métodos tradicionales Cerrados Basados en Cifras (CBN). *Bordón* 63(4), 95-110.
- National Council of Teacher of Mathematics [NCTM] (2015). *De los principios a la acción: para garantizar el éxito matemático para todos*. Comité Interamericano de Educación Matemática.
- Smith, M. y Stein M. (2016). 5 prácticas para orquestar discusiones productivas en Matemática. The Nacional Council of Teacher of Mathematic.

CAPÍTULO 2

CONSTRUCCIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Marco Vinicio Vásquez Bernal

marco.vasquez@unae.edu.ec

Universidad Nacional de Educación UNAE

Azogues, Ecuador

1. Introducción

La finalidad del proceso de educación es generar conocimiento y alcanzar nuevos espacios para todos los involucrados, lo que significa mejorar la sociedad desde sus propios integrantes. Para lograr estos fines, se requiere que los participantes del proceso, especialmente los maestros o facilitadores, estén dispuestos a cambiar su manera de actuar. Más allá de dominar el tema de su cátedra, su disposición al cambio debe estar ligada a su compromiso con el bienestar y equilibrio con el entorno, para de ese modo propiciar en cada ciudadano o futuro ciudadano un conocimiento profundo y transformador. Sus planificaciones, además de buscar transmitir saberes, deben incentivar y desarrollar el pensamiento crítico generador de cuestionamientos y puntos de vista divergentes con capacidad de incidir en la construcción del conocimiento y de una nueva sociedad.

El aula ha dejado de ser un espacio físico en el que se encuentran docentes y estudiantes. Las nuevas concepciones de la educación la caracterizan como un espacio de aprendizaje en el cual se cultivan relaciones con sentido de humanismo, acorde con los cánones de respeto y cordialidad. En el docente recae la mayor responsabilidad para que ese ambiente se haga realidad. La educación es ese puente de ingreso a la cultura, por eso, debe presentar alternativas válidas para que los estudiantes comprendan su realidad y, en consecuencia, puedan moldearla en función de sus nuevas y propias perspectivas.

¿Cómo es posible construir pensamiento matemático en las circunstancias actuales? Este capítulo cumple con el objetivo de responder a esta interrogante y mostrar cómo, desde la práctica, es posible generar procesos que ayuden a la construcción de este pensamiento. A través de una metodología práctica, se presentarán y desarrollarán actividades destinadas a cumplir con el objetivo, respetando el ritmo de cada estudiante y su manera de asimilar los conceptos matemáticos abordados en el currículo ecuatoriano correspondiente a Educación General Básica. La premisa es que quienes algo conocemos de las matemáticas podemos enseñar esta ciencia y presentarla de manera lógica enfatizando su potencial en el desarrollo del pensamiento razonado para convertirla en una herramienta para

pensar y comprender el entorno natural, social y el mundo.

Los números sirven para traducir en medidas concretas el entorno y las circunstancias. Para ello se requieren destrezas que permitan cumplir este objetivo de manera eficaz y efectiva. El razonamiento numérico es una herramienta social que presenta y entiende el rostro real de cualquier realidad a través de cantidades, porcentajes y gráficos (Adams, 1999, pp.229, 244). Es indispensable que el maestro, sujetándose a la ética, reconstruya esa realidad en el aula y enseñe a sus alumnos a hacerlo bajo una premisa: las interpretaciones de los dígitos deben sujetarse a los fundamentos de la ciencia y no a las conveniencias de los actores. Siempre habrá que reconocer el subjetivismo con el que una cantidad, una razón o un porcentaje pueden ser interpretados por distintos individuos. Esto rebasa los objetivos de las matemáticas, pero la ética obliga a que sus productos respondan a la realidad.

El razonamiento numérico se sujeta a lo que se conoce como *trasposición didáctica* que genera conocimiento a partir de la presentación de un problema y una conjetura. También se alinea con lo que se conoce como *pensamiento complejo*, según el cual la interconexión de las distintas dimensiones de lo real logra la generación de nuevas ideas que se originan con base en la reflexión y la discusión. Por lo indicado, se estima que el profesor debe asumir su rol de guía y facilitador, presentando los conocimientos como las herramientas que han de ser utilizadas y perfeccionadas por sus alumnos. Por lo tanto, es imprescindible que los estudiantes conozcan y comprendan a cabalidad las bases concretas de cada tema y su funcionamiento y no únicamente las fórmulas o los procesos simplificados que llevan a resultados rápidos.

2. Lineamientos teóricos

2.1 Competencia matemática

De acuerdo con el real decreto 1631/2006, la competencia matemática:

Consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral. Forman parte de esta la habilidad para interpretar y expresar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones, lo que aumenta la posibilidad real de seguir aprendiendo a lo largo de la vida, tanto en el ámbito escolar o académico como fuera de él, y favorece la participación efectiva en la vida social (Centro de profesorado de Córdoba, 2019, s.p.).

Este concepto, respetando la amplitud del accionar del razonamiento numérico, especifica áreas de acción que deben ser abordadas en la enseñanza, presentada como un proceso de razonamiento y no como un cúmulo de operaciones.

Para lograr un aprendizaje eficaz, se debe respetar el proceso de construcción de la ciencia; un proceso constituido por las siguientes fases: concreto – gráfico – simbólico – abstracto. Este transcurso no replica únicamente cómo el ser humano construyó las matemáticas (Ramírez y Calderón, 2002), sino que además posibilita que la enseñanza se haga partiendo de lo concreto. Con métodos adecuados se logrará entender los fundamentos teóricos que sustenten adecuadamente los resultados.

Con el propósito de entender lo referido, se enumeran algunos indicadores del razonamiento matemático que no responden a jerarquía ni orden alguno, simplemente permiten entender la operatividad de las matemáticas como herramienta fundamental de la vida tomando como base lo planteado por Juan José Caballero y Concepción Navarro.

2.2 Indicadores del razonamiento matemático

- a. Ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad.
- b. Conocer los elementos matemáticos básicos (distintos tipos de números, medidas, símbolos, elementos geométricos, etc.).

- c. Comprender una argumentación matemática.
- d. Seguir determinados procesos de pensamiento (como la inducción y la deducción, entre otros).
- e. Integrar el conocimiento matemático con otros tipos de conocimientos.

I. Producir e interpretar distintos tipos de información

- a. Expresar y comunicar información en lenguaje matemático.
- b. Expresar e interpretar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones.
- c. Seguir cadenas argumentales identificando las ideas fundamentales.
- d. Estimar y enjuiciar la lógica y validez de argumentaciones e informaciones.
- e. Identificar la veracidad de los razonamientos.
- f. Identificar situaciones cotidianas que requieren la aplicación de estrategias de resolución de problemas.
- g. Seleccionar las técnicas adecuadas para calcular, representar e interpretar la realidad a partir de la información disponible.

II. Resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y laboral

- a. Manejar los elementos matemáticos básicos (distintos tipos de números, medidas, símbolos, elementos geométricos, etc.) en situaciones reales o simuladas de la vida cotidiana.
- b. Poner en práctica procesos de razonamiento que llevan a la obtención de información o a la solución de los problemas.
- c. Aplicar algoritmos de cálculo o elementos de la lógica.
- d. Aplicar los conocimientos matemáticos a una amplia variedad de situaciones provenientes de otros campos de conocimiento y de la vida cotidiana.
- e. Aplicar aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente.
- f. Utilizar los elementos y razonamientos matemáticos para enfrentarse a aquellas situaciones cotidianas que los precisan.

2.3 Didáctica de las matemáticas

La construcción del conocimiento se sustenta fundamentalmente en el razonamiento y la capacidad que los individuos desarrollen para hacerlo. El profesor debe generar las actitudes, la disposición para razonar y los procesos para conseguirlo (Ramírez, 2002). Luego desarrollará las destrezas de los procesos matemáticos para modelar la realidad. El estudiante, como actor principal del proceso de enseñanza, debe asimilar la idea de que la utilidad de sus conocimientos radica en la manera que le sirven para solucionar problemas de su vida real.

La teoría propone que la enseñanza de las matemáticas se fundamenta en cuatro principios:

Principio de pertinencia con el perfil de salida. Lo que se aprenderá en el aula debe responder directamente a lo que requiere el perfil del educando: cada unidad, cada contenido ha de servir de herramienta para que, quienes se nutran de estos, los puedan utilizar como procesos de ayuda para su desempeño final. Vale la pena indicar que lo que determine los temas y la profundidad en que se aborden como resultados mínimos para el desempeño eficiente del bachiller o del profesional, será el perfil del bachiller. La enseñanza de las matemáticas deberá crear el vínculo para recrear y entender el lazo entre la realidad y el aula, dando prioridad a la práctica y presentando lo teórico como fundamento de validación y de sustentación del conocimiento, mas no como el fin mismo de las matemáticas.

Principio de adaptabilidad al medio. Cualquier profesor debe ser capaz de desarrollar su cátedra en cualquier realidad circunstancial, mucho más aquel que enseña cómo la ciencia de las matemáticas permite entender esa realidad. Ninguna aseveración justifica el incumplimiento de este principio. Lo tecnológico, la infraestructura, los métodos, los recursos ayudan a presentar de mejor manera un conocimiento; mas lo determinante siempre será la vocación del maestro y su destreza para hacer de cualquier vivencia y de cualquier material un recurso didáctico que lo ayude a presentar su cátedra.

Principio de integralidad. Ningún conocimiento es aislado, mucho más cuando este debe servir de herramienta para entender el entorno, por tanto, su efectividad se asegura cuando existe la continuidad entre

los procesos de complejidad que irán surgiendo. Esta integralidad debe darse tanto entre los niveles de profundidad de las matemáticas como también entre asignaturas que cursa el estudiante, lo que garantizará que el alumno de matemáticas pueda generar conocimientos ricos en vivencias y con respuestas reflexivas a la complejidad de sus vivencias (Departamento de Didáctica de Matemáticas, 2003).

Principio de valores éticos. La cantidad o el número ha de presentarse como una herramienta que ayude a construir una sociedad justa, presentando los resultados de las matemáticas no como elementos absolutistas que clasifiquen, jerarquicen y discriminen, sino más bien como elementos que propicien la reflexión y permitan construir alternativas de bienestar colectivo.

Con lo indicado, se propone una metodología que se basa en la construcción de un espacio de armonía entre profesores y alumnos para construir conocimiento. Y luego, con esa metodología, se busca diseñar actividades que surjan de lo concreto y permitan la transmisión de conocimientos.

3. Metodología didáctica

3.1 Herramientas metodológicas

Sujetándonos al Modelo Pedagógico de la Universidad Nacional de Educación, UNAE, se propone que las matemáticas se enseñen haciendo, es decir, haciendo tangible el conocimiento y haciendo que surja de la práctica. En tal sentido, se plantea utilizar las siguientes herramientas metodológicas:

√ *El aprendizaje basado en problemas (ABP).* Por este medio es posible llevar realidades de la vida diaria al aula y propender que los alumnos construyan alternativas de solución de acuerdo con sus conocimientos y con su propia reflexión, apoyados, por supuesto, en la información existente. Esta herramienta es muy útil, ya que destruye ese concepto de que aprender es acumular información, concepto que en la era de la informática carece de

valor, ya que la información está a la mano de todos. Lo clave radica en tener el criterio para utilizar la información correcta y generar reflexivamente su interpretación.

√ *El aula invertida*. Está muy ligada al ABP y se sustenta en las herramientas tecnológicas. Los conceptos teóricos y las fundamentaciones serán asimilados de forma individual y libre por los estudiantes, haciendo del aula el espacio para discutir, construir definiciones propias y conocimientos sustentados en la percepción y análisis de cada individuo. Esta propuesta permitirá entender la fundamentación formal de las matemáticas como herramienta base a la que se puede acceder individualmente, y que luego servirá de insumo para resolver circunstancias de la vida real y para construir el nuevo conocimiento.

√ *Estudio de la lección*. Herramienta colectiva que se ancla en los conceptos del mejoramiento continuo; permite que los docentes mejoren cada vez más su desempeño. Se basa en la observación colectiva, en la apertura por aprender y busca sistematizar los procesos que han de permitir un mejor desenvolvimiento del profesor.

Con esta metodología se crearán y validarán las actividades didácticas y los recursos didácticos que ayuden a mejorar el desempeño. Para la creación de esas actividades se propone una metodología basada en la construcción de un espacio de armonía entre profesores y alumnos (De Alonso, 2002, p.65) y consensuar la realidad del estudiante con los objetivos del curso, partiendo de la realidad circunstancial y buscando el desarrollo de las destrezas matemáticas. La metodología se sujeta a los siguientes pasos:

1. Identificar los temas de la asignatura de Matemáticas que generan problemas en el alumnado.
2. El docente debe recabar toda la información teórica sobre experiencias similares en otros establecimientos o en años anteriores.
3. El profesor, con base en lo investigado, estructurará actividades absolutamente concretas que ayuden a los estudiantes a entender mejor el tema.
4. Realizar la actividad en clase.

5. Sistematizar el proceso registrando lo observado.

Para cumplir a cabalidad el propósito de mostrar lo simple y concreto de las matemáticas, se propone que esta metodología se sujete a las siguientes normas:

- El alumno debe ser el actor fundamental, debe ser quien encuentre diversos resultados al manipular los objetos.
- La explicación teórica debe ser explícita y posterior a los resultados obtenidos.
- El profesor es un involucrado más que guía el proceso y no adelanta ni propone ningún resultado.
- Se trabajará de lo individual a lo grupal y de lo particular a lo general.
- Los materiales utilizados deben ser inofensivos y respetar el medio ambiente.
- Todos los resultados presentados poseen el mismo valor cualitativo sabiendo que pueden surgir algunos no previstos.

3.2 Actividades

Para su desarrollo se propone la ejecución de algunas actividades que promuevan el desarrollo de destrezas del pensamiento numérico.

a) Multiplicación gráfica

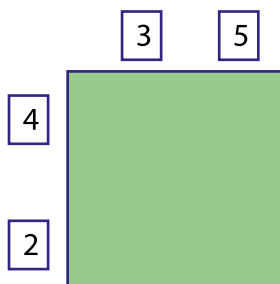
Existe un proceso para multiplicar utilizado antiguamente por el pueblo chino. Se basa simplemente en contar cuántos puntos surgen como intersección de rectas, y con ello es posible llegar a la respuesta. Para iniciar, se deben plantear algunas inquietudes:

- Si a tres líneas verticales les cruzamos una línea horizontal ¿cuántos puntos de corte se generarán?
- ¿Qué pasará luego si les cruzamos con dos líneas horizontales? ¿Cuántos puntos de corte se generarán?
- ¿Si las cruzamos con doce líneas horizontales?
- Si no las cruzamos con línea horizontal alguna, ¿cuántos puntos de corte se generarán?
- ¿Qué cambia si inicialmente tenemos siete líneas verticales?
- Por último, pedimos que el grupo responda con fundamento a la inquietud: ¿qué operación matemática modela esta realidad?

Bajo este razonamiento, se sigue un procedimiento para calcular el producto entre dos números.

I. Ubicar las dos cantidades, una de forma horizontal y otra de forma vertical, de abajo hacia arriba y de izquierda a derecha respectivamente, respetando la ubicación de la numeración decimal. Para que se entienda, se propone multiplicar 24 por 35, tal como se presenta en las Figuras 1, 2, 3 y 4.

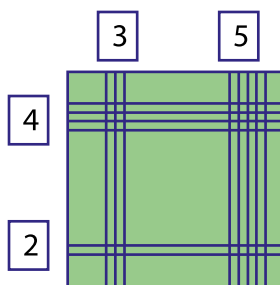
Figura 1. Procedimiento para calcular el producto entre dos números



Fuente: Elaboración propia

II. Junto a cada dígito y en dirección perpendicular a la del número, se trazarán tantas líneas como sea el valor absoluto de cada dígito (si el dígito es cero no trazamos recta alguna).

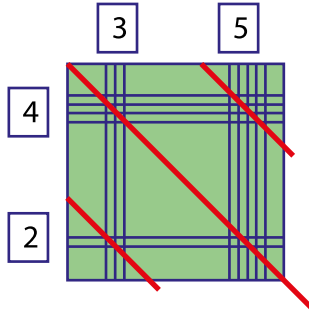
Figura 2. Procedimiento para calcular el producto entre dos números



Fuente: Elaboración propia

III. Se trazarán diagonales de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, de forma que atraviese los grupos de centésimas, décimas, unidades, decenas, centenas, unidades de mil, etc.

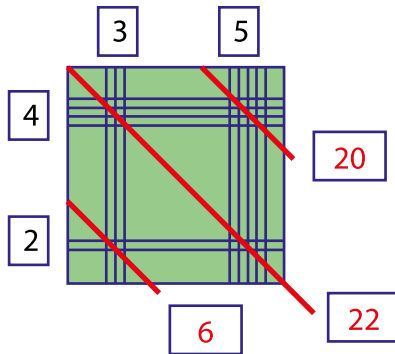
Figura 3. Procedimiento para calcular el producto entre dos números



Fuente: Elaboración propia

IV. Se contarán todos los puntos de corte de los grupos por donde atraviese cada diagonal, anotando al final de estas el resultado.

Figura 4. Procedimiento para calcular el producto entre dos números



Fuente: Elaboración propia

Iniciando por la diagonal ubicada más a la derecha, el dígito de la unidad se ubicará en el resultado. De existir otros dígitos, estos se sumarán como unidades con el resultado obtenido para la diagonal inmediatamente a la izquierda, fijando el último dígito en el resultado y repitiendo el proceso hasta llegar a la primera diagonal de la derecha donde se escribirá el resultado completo.

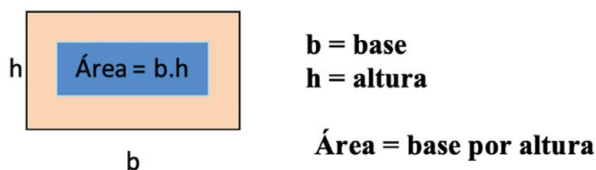
Para el ejemplo del resultado de la primera diagonal, tomamos el 0 que se ubica como último dígito del resultado final. Al 2 lo sumamos al 22, el resultado sería 24. De este valor tomamos el 4 y lo ubicamos como penúltimo dígito del resultado final y el 2 sumamos al 6, quedando allí el 8 que completará el resultado final.

El resultado de la multiplicación es el número que tiene por dígitos, los que resulta del paso anterior para cada una de las diagonales, iniciando por la derecha. El resultado de la multiplicación planteada será 840.

b). El área de una figura geométrica

Definición de área. El área de una figura geométrica se entiende como el espacio bidimensional limitado por la forma. Con base en la definición expuesta, se puede decir que el área de un rectángulo se define como base por altura, tal como se observa en la Figura 5.

Figura 5. Área de un rectángulo



Fuente: Elaboración propia

Esta definición es básica y sirve para calcular el área de cualquier rectángulo.

Construcción de un triángulo

Con los tres segmentos, construir el triángulo que tenga por lados los segmentos a , b y c , tal como se explica en las Figuras 6, 7 y 8.


a (8u) 

b (6u) 

c (4u) 

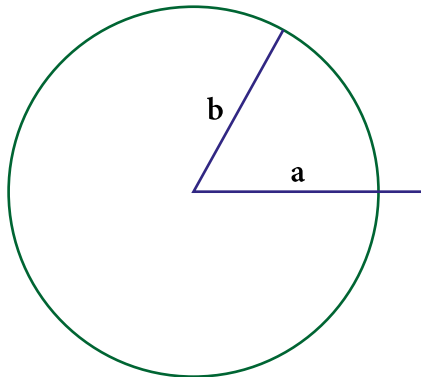
Procedimiento

Se grafica el lado mayor (a).

 a

Con el compás se hace centro en uno de los extremos, se abre una magnitud igual a uno de los otros lados dados (b) y se traza un círculo con ese radio.

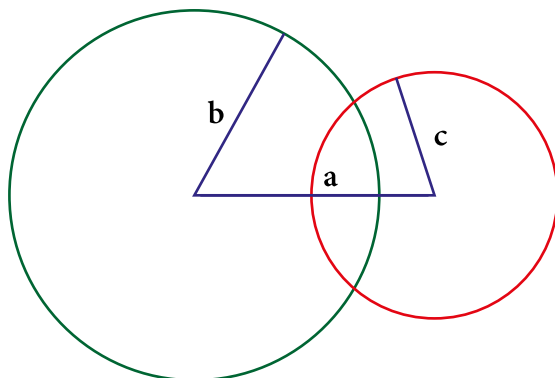
Figura 6. Construcción de un triángulo (a)



Fuente: Elaboración propia

De igual forma, con el compás se hace centro en el otro extremo de a , se abre una magnitud igual al tercer lado (c) y se traza un círculo.

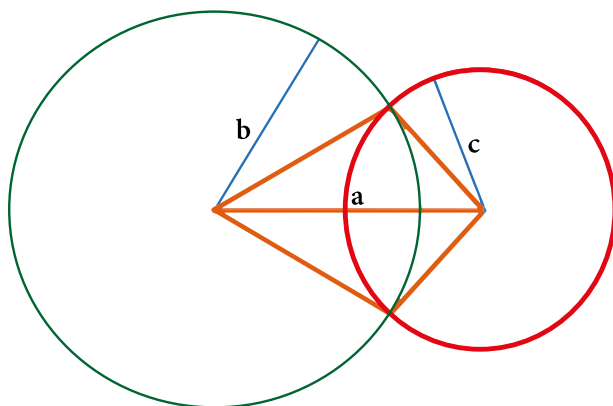
Figura 7. Construcción de un triángulo (b)



Fuente: Elaboración propia

Se une cualquiera de los dos puntos de corte de los círculos con los extremos del primer segmento trazado y se obtienen los otros dos lados del triángulo.

Figura 8. Construcción de un triángulo

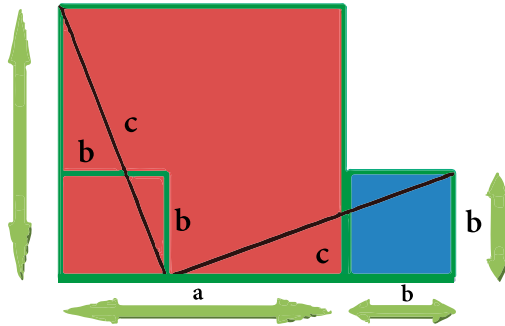


Fuente: Elaboración propia

c) El teorema de Pitágoras

Es uno de los más conocidos en geometría y en las matemáticas, posee infinidad de demostraciones. Enmarcamos la realidad que vivió Pitágoras, cuya explicación se aprecia en las Figuras 9 y 10.

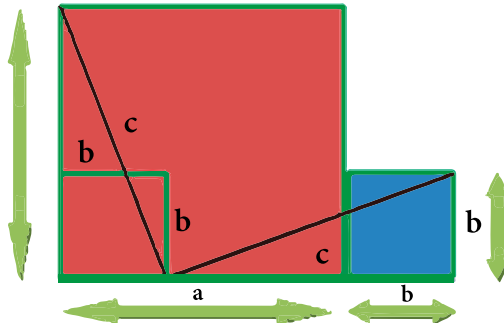
Figura 9. Demostración del teorema de Pitágoras



Fuente: Elaboración propia

Nota. Partiendo de dos cuadrados cualesquiera, uno de lado a y área a^2 , otro de lado b y área b^2 en una esquina del cuadrado mayor marcamos lo correspondiente al cuadrado menor.

Figura 10. Demostración del teorema de Pitágoras

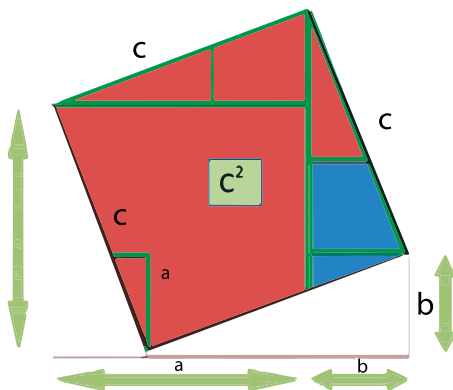


Fuente: Elaboración propia

Luego trazamos las rectas que completan el triángulo rectángulo con catetos a y b , que en este caso llamamos c , es decir c es la hipotenusa

del triángulo rectángulo abc . Existen áreas de los cuadrados iniciales que quedan fuera de las hipotenusas trazadas. A esas áreas se las puede mover, como se observa en la Figura 11, completando el cuadrado de área c^2 .

Figura 11. Demostración del teorema de Pitágoras



Fuente: Elaboración propia

Con lo indicado queda demostrado que “La suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa del mismo”, es decir, se brinda un resultado similar al mundialmente conocido:

$$c^2=a^2+b^2$$

d) Generalización del teorema de Pitágoras

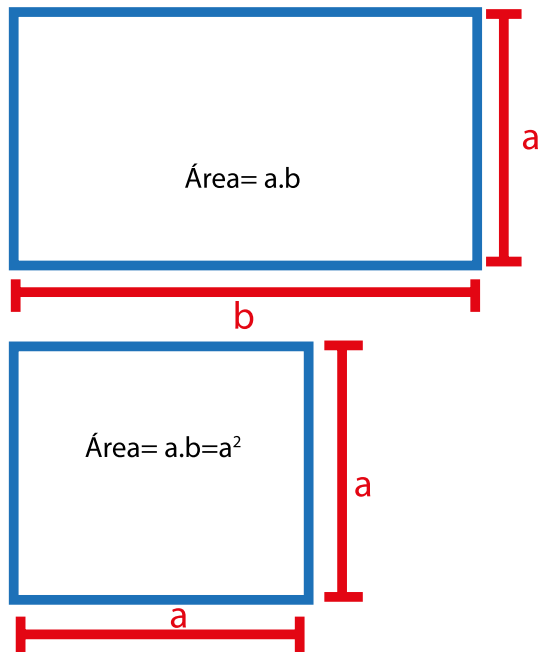
Se ha demostrado la construcción de cuadrados sobre cada lado del triángulo rectángulo. Sin embargo, este resultado puede ser generalizarlo al aseverar que las figuras que se construyen sobre cada lado del triángulo rectángulo pueden ser cualquier figura geométrica semejante en los tres lados. Entonces es posible componer el siguiente enunciado:

“La suma de las áreas de dos figuras geométricas semejantes, construidas sobre los catetos de un triángulo rectángulo, es igual al área de otra figura semejante construida sobre su hipotenusa”.

e) Productos notables

Se continúa trabajando con cartulina y se recuerda los siguientes conceptos de áreas explicados en la Figura 12.

Figura 12. Cuadrado de un polinomio

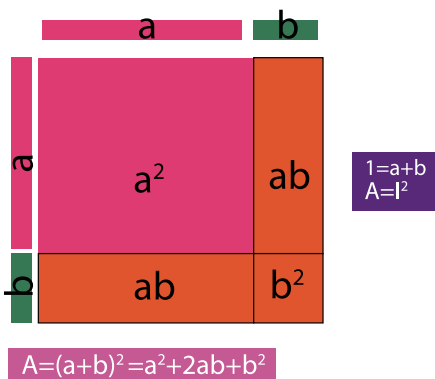


Fuente: Elaboración propia

Nota. El área de un rectángulo es igual a base por altura.

¿En cartulina se puede desarrollar $(a+b)^2$? La respuesta se observa en la Figura 13.

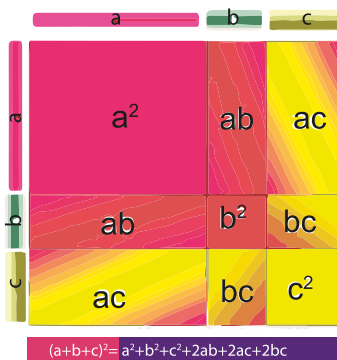
Figura 13. Desarrollo de $(a+b)^2$



Fuente: Elaboración propia

¿En cartulina se puede realizar el desarrollo de $(a+b+c)^2$? Nótese el desarrollo en la Figura 14.

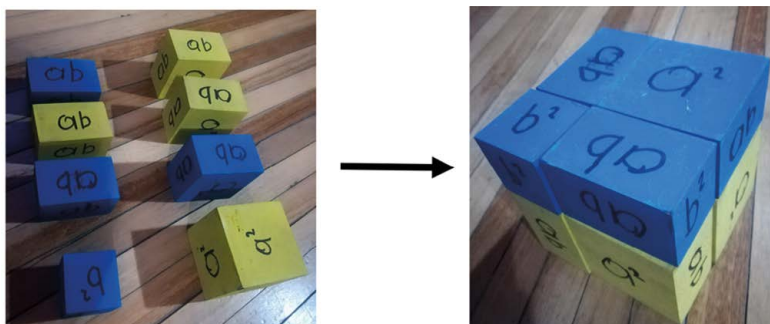
Figura 14. Desarrollo de $(a+b+c)^2$



Fuente: Elaboración propia

Para trabajar en tres dimensiones se construirán las piezas, tal como se presenta en la Figura 15.

Figura 15. Material tangible para potencias de polinomios, piezas construidas



Fuente: Elaboración propia

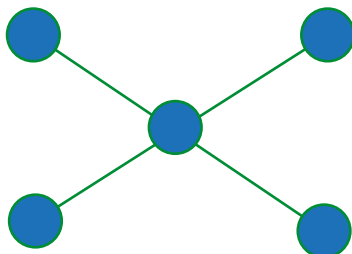
Vale la pena pensar cómo se podría trabajar para desarrollar $(a+b+c)^3$.³ Con estos materiales se trabajarían todos los productos notables.

f) Retos matemáticos, una forma amigable de entender esta ciencia

La razón de ser de las matemáticas es, sobre todo, entender el entorno y las circunstancias en magnitudes y medidas (Gardner, 1988, p.18), cuestión aparentemente simple que genera resistencia y temor en los estudiantes de cualquier geografía y de cualquier edad. De forma muy resumida se brinda aquí una metodología que no habla de problemas (Vásquez, 2014, p.12), por la concepción psicológica de este vocablo, sino que propone *retos* o *desafíos* que incitan al alumno a resolverlos. Además, su resolución no demanda de fórmulas ni procesos establecidos, requiere únicamente de razonamiento y de conocimientos básicos de matemáticas.

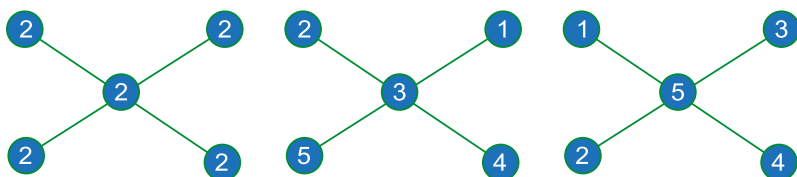
Resolver el reto. Se han trazado dos segmentos de rectas que se cortan en un punto, tal como se observa en las Figuras 16 y 17. Ubicar en el punto de corte y en los extremos de los segmentos, números enteros del 1 al 5 de forma que los que se ubican en cada segmento sumen un mismo resultado.

Figura 16. Planteamiento del reto



Fuente: Elaboración propia

Figura 17. Posibles soluciones



Fuente: Elaboración propia

Lo importante de este tipo de ejercicios es que puede desarrollarse la metacognición con el apoyo de preguntas directas como las siguientes:

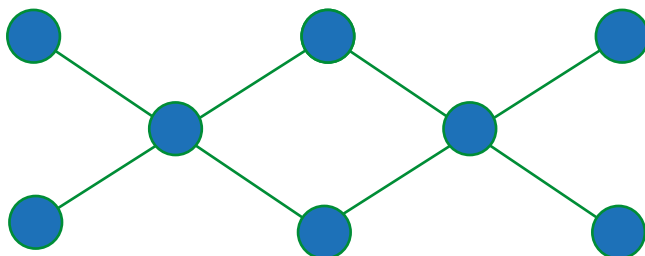
- ¿Es única la solución?
- En el centro ¿puede ubicarse un número par?
- ¿Es posible plantear este reto con otra colección de números?
- Con este tipo de reto, ¿es posible trabajar contenidos de lógica de conjuntos, álgebra, progresiones, potenciación u otras áreas de las matemáticas?

Además, posibilita complejizar el reto y plantear algo como lo siguiente:

Resolver el reto. Se han trazado cuatro segmentos de rectas como se observa en las Figuras 18 y 19.

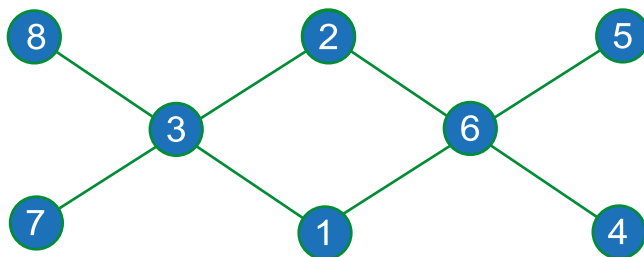
Figura 18. Actividad de ubicar número enteros en los puntos

Consigna: Ubicar en los puntos de corte y en los extremos de los segmentos, números enteros del 1 al 8 de forma que los que se ubican en cada segmento sumen un mismo resultado.



Fuente: Elaboración propia

Figura 19. Solución a la consigna ubicar números



Fuente: Elaboración propia

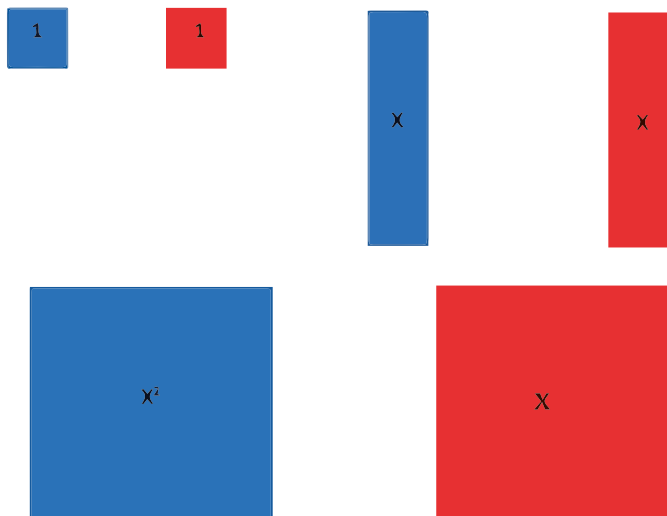
En este caso, también es posible plantear preguntas y generar reflexiones interesantes. Además, se pueden sistematizar los procesos lógicos para construir estos resultados.

g) Factorando en un rompecabezas

De la experiencia, se puede afirmar que el tema del factoro es el que más complicaciones genera en el aprendizaje. En esta actividad, se intenta el apoyo de la lúdica para mitigar esa barrera (Amat, 2015, p.34).

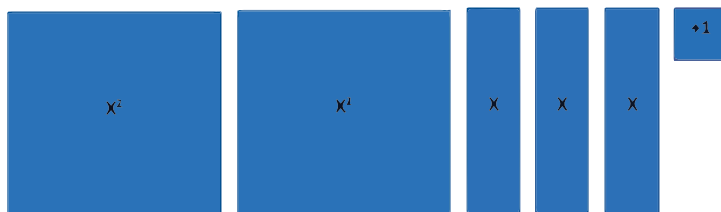
En la actividad se designa la siguiente simbología: el color azul es positivo y el color rojo negativo. Construyendo en dos dimensiones se tendrán las representaciones presentadas en las Figuras 20-27.

Figura 20. Factorando en un rompecabezas



Fuente: Elaboración propia

Figura 21. Representación de la expresión $2x^2 + 3x + 1$



Fuente: Elaboración propia

Aquí no se grafica X^3 , en la práctica sí es posible hacerlo con prismas rectangulares de madera, tal como se observó en los productos notables.

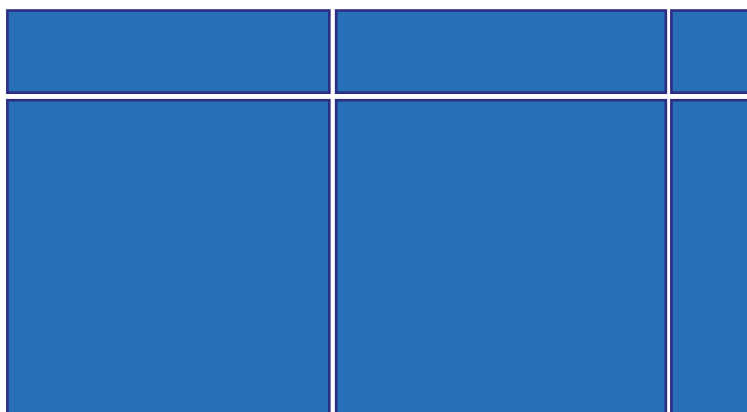
Figura 22. Actividad de reubicar piezas

La actividad consistirá en retar a que los estudiantes reubiquen las piezas, de tal forma que se forme un rectángulo completo



Fuente: Elaboración propia

Figura 23. Resultado de la consigna (fig. 22)



Fuente: Elaboración propia

El resultado de la construcción será sobre la forma, aunque las piezas no se ubiquen exactamente en ese orden. Luego se analiza la figura construida a su lado horizontal igual a $(2X+1)$ y su lado vertical igual a $(X+1)$. Y, como esta área grande es la suma de las áreas de cada una de las piezas, se puede concluir que:

$$2X^2 + 3X + 1 = (2X+1)(X+1)$$

Que justamente cumple lo establecido en el factoro.

Ahora, para abordar los términos positivos y negativos, se trabajará de la siguiente manera:

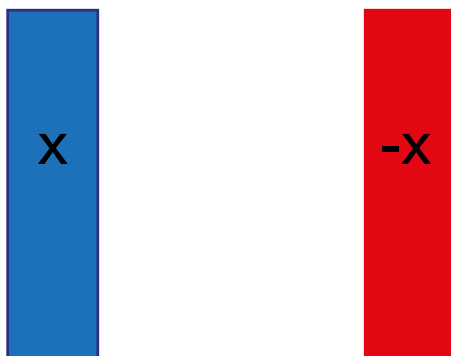
Figura 24. Expresión $x^2 - 1$



Fuente: Elaboración propia

Se debe solicitar a los estudiantes que construyan un rectángulo con estas piezas, y que las filas que se formen de todas las piezas sean de un mismo color. Luego se demuestra la imposibilidad de construir el triángulo.

Figura 25. Resultado de la consigna: construir el rectángulo



Fuente: Elaboración propia

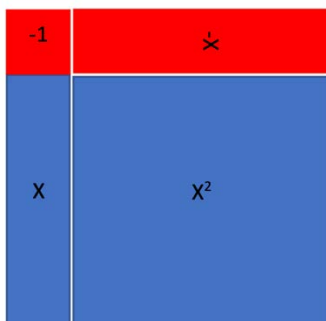
Hay que recordar que, al aumentar estas piezas, realmente se está añadiendo cero, es decir, no se altera la expresión inicial.

Figura 26. Construcción del rectángulo



Fuente: Elaboración propia

Figura 27. Construcción del rectángulo final



Fuente: Elaboración propia

Se verifica que la longitud del lado horizontal es $(X+1)$ y la longitud del lado vertical es $(X - 1)$. Consecuentemente: $X^2 - 1 = (X+1) (X-1)$.

Conclusiones

Los ejemplos pretenden demostrar cómo las matemáticas surgen de la práctica y sirven para solucionar problemas de la vida cotidiana, por lo que su enseñanza debería seguir igual premisa. Se reitera que en ningún momento se busca contradecir ni menospreciar los desarrollos netamente teóricos que llegan al mismo resultado. Únicamente se

buscan y proponen estrategias más amigables que ayuden en el proceso enseñanza aprendizaje.

Para entender lo valioso de estos resultados matemáticos, hay que afirmar que no es una coincidencia que surjan del material concreto, esos contenidos están en la materia compleja por su sistematicidad, únicamente no los vemos porque pensamos que las matemáticas están constituidas únicamente por símbolos y teoremas. Siempre es posible encontrar estos procesos por cuanto las matemáticas surgen de lo concreto. De igual modo, las matemáticas y la lógica están íntimamente relacionadas y su existencia se retroalimenta continuamente, por ello, el razonamiento es el único medio válido para entender la ciencia. La importancia de entender el razonamiento numérico y los procesos en matemáticas es vital para una comprensión cabal de la ciencia.

Referencias bibliográficas

- Amat, C. (2015). Ver para aprender. Material didáctico para niños con autismo. <http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/53707>.
- Adams, J. (1999). *Guía y juegos para superar bloqueos mentales*. Gredosa.
- De Alonso, M. (2002). *Los juegos en el aula*. Servicio de Publicaciones de CSI-CSIF.
- Gardner, M. (1988). *Matemática para divertirse*. Granice.
- Ramírez, R. (2003). El ingenio no tiene edad. *Encuentro de profesores de matemáticas de Primaria y Secundaria*. Castellón.
- Ramírez, R. y Morales, S. (2002). ¿Cuánto de ingenio hay en un problema de ingenio? En J. M. Cardemos y otros (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Resolución de problemas* (pp. 223-228). Departamento de Didáctica de la Matemática/Saem Thales.
- Vásquez, M. (2014). *Propuesta didáctica de matemáticas*. OEI-Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación. OEI.
- Centro de Profesorado de Córdoba (2019). Educar en competencias. <https://n9.cl/4sjb2>

CAPÍTULO 3

EMPODERAMIENTO DOCENTE: UNA REFLEXIÓN A PARTIR DE LA REPRODUCIBILIDAD DE SITUACIONES DE ENSEÑANZA

Javier Lezama

flezama@ipn.mx

CICATA del Instituto Politécnico Nacional

CDMX, México

Daniela Reyes-Gasperini

daniela@empoderamientodocente.org

Empoderamiento Docente

CDMX, México

1. Introducción

La Sociología difiere de las otras ciencias al menos en un punto: se exige de ella una accesibilidad que no se le pide a la Física, ni siquiera a la Semiología o a la Filosofía. Rechazar la obscuridad es quizá también una manera de poner de manifiesto qué se desearía comprender, o estar seguro de comprender, cosas que se siente que vale la pena comprender. En todo caso, no hay sin duda dominio en el que el 'poder de los expertos' y el monopolio de la 'competencia' sea más peligroso e intolerable. Y la Sociología no se merecería ni una hora de esfuerzo si tuviera que ser un saber de expertos reservado a expertos (Bourdieu, 2003, p.7).

Lo mismo se podría decir de la matemática educativa como campo científico de conocimiento. Es un campo que estudia a la sociedad cuando edifica y genera escenarios para su construcción y cuando comunica conocimiento matemático en la escuela, pero no solamente en ella. El rigor y erudición es indispensable para sus constructos y métodos y para investigar los fenómenos que la ocupan y que se constituyen en edificación de conocimiento, El profesor de matemáticas demanda de ideas y conocimientos bien fundamentados para innovar su práctica. Se aspira a que en nuestra discusión se pueda alcanzar tan alto propósito.

2. El fenómeno didáctico de la reproducibilidad

Estudiar la reproducibilidad de una situación didáctica es establecer explícitamente los factores que posibilitan o no el logro de sus propósitos didácticos al repetirla en distintos escenarios. Alrededor del fenómeno del envejecimiento de situaciones de enseñanza se inicia la exploración del fenómeno de la reproducibilidad ya que, como se verá más adelante, este fenómeno está asociado a la actividad de repetir la misma clase o situación en varios escenarios distintos.

Brousseau (1986, p.45) introdujo la noción de *envejecimiento de las situaciones de enseñanza* para designar el problema que experimenta el profesor para reproducir una misma lección con nuevos estudiantes. Los resultados que se obtienen son diferentes en cada repetición y

en ocasiones mucho más pobres. Él afirma que el profesor siente la necesidad de modificar las instrucciones, su exposición, los ejemplos, los ejercicios y en ocasiones hasta la estructura misma de la lección y, mientras más repite la lección, este fenómeno se acentúa hasta llegar a cambiar el sentido de la lección original. Reconoce que las situaciones con poca interacción entre alumno y profesor, como las exposiciones seguidas de ejercicios o instrucciones acompañadas de una situación de aprendizaje, envejecen más lentamente.

Como se mencionó anteriormente, el envejecimiento de situaciones está asociado a otro de índole más general, el de la reproducibilidad de situaciones de enseñanza. Brousseau (1981) formula preguntas que ayudan a vislumbrar la problemática asociada al fenómeno de la reproducibilidad: el hecho de reproducir situaciones de aprendizaje provoca una pregunta que es esencial para la didáctica ¿qué es lo que realmente se reproduce? Y agrega:

Un profesor que reproduce la *misma historia*, la misma sucesión de actividades y las mismas declaraciones de su parte y de parte de sus alumnos “¿ha reproducido el mismo *hecho didáctico* que ha producido los mismos efectos desde el punto de vista del sentido?” Además, declara saber lo que se reproduce en una situación de enseñanza es justamente el objetivo de la didáctica, no es un resultado de la observación, sino el de un análisis que se apoya en el conocimiento de los fenómenos que definen lo que dejan invariable (p.85).

Estas dos preguntas expuestas permiten, en principio, identificar elementos que pudieran caracterizar el fenómeno que designamos como *reproducibilidad*.

2.1 El primer estudio sistemático de reproducibilidad

La tesis doctoral *Contribuciones al estudio de la reproducibilidad de situaciones didácticas. Diversos trabajos de matemáticas y de didáctica de las matemáticas*, de Artigue (1984), constituye el primer estudio específico sobre la reproducibilidad. Las preguntas que guían su investigación son: ¿cuáles son los fenómenos observados y las variables que los determinan?, ¿qué relaciones existen entre las historias de clase

y las historias individuales de los alumnos?, ¿se puede pasar de un discurso descriptivo a uno explicativo y, aún más, a uno predictivo a nivel de los alumnos, a nivel del grupo? Su objetivo es construir un modelo que caracterice a la reproducibilidad como un fenómeno didáctico para así poderlo estudiar, explicar y simular. No se busca que todo ocurra de la misma manera, se sabe que eso es imposible.

Según Artigue (1995, p.50), Brousseau es el primero en enfrentarse al problema de la reproducibilidad e identifica dos tipos: *una externa*, de orden dinámico, que se ubica en el nivel de las historias de clase (actividades, procedimientos, etc.), y *otra interna*, que se coloca en el nivel de la comprensión de los significados. Y luego explica que las regularidades observadas a nivel de procedimientos y de órbitas deben ser esencialmente los hechos de regularidades individuales. Ellas no deben estar sujetas a las acciones de concentración y desbloqueo (actividades atribuidas al profesor: en la primera, interviene para regresar al problema a los estudiantes que se han dispersado; en la segunda, ayuda a los estudiantes a salvar dificultades que les impiden continuar trabajando el problema) producidas por el instructor. Adicionalmente, explica que las ligeras perturbaciones que no puedan evitarse y que se producen de una clase a la otra, no deben tender a amplificarse.

El modelo ingenuo presupone que las regularidades colectivas son la suma de las regularidades individuales, o bien, que las regularidades individuales finalmente se transforman en regularidades colectivas. Con base en este modelo, se tomarían las regularidades en las trayectorias individuales como los elementos que garantizan estabilidad y reproducibilidad suficiente para compartirse. Colocándonos en ese modelo, se considerarán las situaciones que mejor se adapten a sus características, es decir, a situaciones en las cuales el estudiante confronta individualmente la resolución de un problema preciso y controla por sí mismo los resultados de su actividad.

El método seguido por Artigue para establecer la reproducibilidad consistió en matematizar el modelo ingenuo. Para ello, se definen conceptos como los de trayectorias, historias individuales, historias de clase, órbitas, campo ponderado y la noción de vecindad sobre el conjunto de historias de clase, entre otras.

Artigue (2018, p.10), más de tres décadas después, vuelve al tema y desarrolla una profunda reflexión sobre el problema de reproducibilidad en didáctica de las matemáticas. Señala que reconoce que esta sufre “presiones constantes que aspiran a someterla a los modos de producción y de validación de las ciencias experimentales” (p.10), y pone como ejemplo el concepto de Evidence-Based Education inspirado en Evidence –Based Medicine (Biesta, 2010; Wiseman 2010).

En el artículo, Artigue (2018) revisa sintéticamente el largo proceso de investigación y reflexión sobre reproducibilidad, de forma metodológica y a través de procesos informáticos y de simulación, los cuales, a pesar de haber sido altamente valorados en su tiempo, no han podido encontrar continuidad en otros investigadores. Señala también que los diseños de actividades para la investigación muestran los vínculos entre investigación y acción didáctica y evidencian el modelo ingenuo de reproducibilidad centrado más en las historias, trayectorias, que en las condiciones que las hacen posibles. Además, señala que se busca más la reproducibilidad externa en detrimento de la reproducibilidad interna, la cual, por sí sola, puede garantizar los aprendizajes previstos.

2.2 Revisitando “Un estudio de la función 2^x ”

En el año de 1998 se diseñó una ingeniería didáctica orientada a explorar nuevas maneras de abordar la función exponencial que formaba parte de un proyecto dirigido a la elaboración de un nuevo lenguaje gráfico (en el marco de la construcción de un universo de formas gráficas) que sea a su vez amplio, estructurado y que permita constituir una base de significaciones para procesos y conceptos del cálculo preuniversitario y universitario. Los resultados del estudio de reproducibilidad de dicha ingeniería, que constituyen las investigaciones de maestría y doctorado de uno de los autores de este capítulo, se reportaron en Lezama (2005, p.349). Más de dos décadas después, se buscó reflexionar el aspecto de la reproducibilidad interna revisitando la Ingeniería Didáctica denominada *Un estudio de la función 2^x* (Lezama, 2003, p.157). En particular, la situación se somete a un estudio de reproducibilidad sobre la base de los trabajos actuales de Artigue.

Para esta nueva visita al tema, se considerarán dos aspectos y se los explotará a partir de los avances de las investigaciones en socioepistemología. Se comenzará planteando qué es la socioepistemología, de manera general, pues los lectores podrán encontrar variada bibliografía al respecto. A grandes rasgos, constituye un sistema teórico para la investigación en matemática educativa que se ocupa de entender cómo se construye el saber matemático, reconocer formas de saber, popular, técnico y sabio, por lo que plantea de manera fundamental una relación social con el saber humano, por ello se puede afirmar que es una teoría que busca modelar *la construcción social del conocimiento matemático*. Esta disciplina reconoce que la escuela está dominada por una forma de pensar hegemónica (Soto y Cantoral, 2014), uno de sus fenómenos más aberrantes, pues implica la paradójica exclusión de muchos de aquellos a quienes busca beneficiar. Por tales motivos, la investigación desarrollada en este marco teórico propone el *rediseño del discurso matemático escolar*.

Volver a mirar hechos investigados en el pasado, a la luz del avance de la socioepistemología, no niega lo dicho en aquella época, por el contrario, se pueden interpretar los fenómenos que se produjeron de manera más consistente para continuar comprendiéndolos (una reflexión colateral: ¿podríamos decir alguna vez que hemos comprendido a cabalidad un asunto educativo? Se cree que la respuesta a esta pregunta es un no rotundo. En particular, la matemática educativa es una disciplina social que estudia la construcción de un conocimiento específico asociado a una disciplina dura, exacta. La combinación de ambas da lugar, a nuestro entender, a que continuamente estemos repensando las afirmaciones pasadas, ¿cierto? Cerramos la reflexión e invitamos a pensar en ello).

Así mismo, y ya en otro contexto de interpretación, se abordará la estructura de la situación de aprendizaje, su contenido y la relación que vincula al conocimiento matemático que emerge con la propuesta y las acciones del profesor que se apropia de ella, sujetándola a sus interpretaciones en busca de reproducirla y alcanzar el propósito didáctico. Dicho técnicamente, se espera alcanzar reproducibilidad, hecho que, mirado desde la teoría, representa un asunto de gran complejidad para alcanzarla en sus dos niveles, externo e interno, como declara

Artigue (2018, p.25), restringirse como en muchos otros casos a solo una reproducibilidad de procedimientos.

2.3 Propósito de la situación

La situación *Un estudio didáctico de la función 2^x* está orientada a que el estudiante construya la noción de función exponencial. Para ello se propone una serie de acciones y actividades que serán desarrolladas paso a paso a partir de criterios geométricos tales como localizar puntos en el plano, escribir tablas e identificar regularidades que permitan elaborar generalizaciones pertinentes.

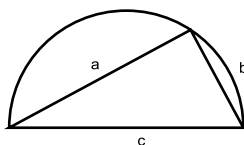
Se plantea una construcción cuyas características atienden a elementos geométricos y gráficos indispensables en el desarrollo de las actividades en las que se les solicita que efectúen trazos y localicen puntos en un sistema coordenado rectangular. La inducción de lo local a lo global se presenta en las actividades en las que se les solicita argumentar la posibilidad de localizar más puntos, y en las que se deberá argumentar sobre los cocientes y las diferencias que se observarán en otras tablas diferentes a las analizadas. También está presente el elemento de generalización, el cual se puede encontrar en la actividad en la que se les pide analizar las regularidades observadas para 2^x y, a partir de ello, extenderse a otras bases. El diseño completo se puede encontrar en Lezama (2003, p.57).

2.4 Características fundamentales del diseño

Se presentan algunos aspectos del diseño de la situación que servirán como elementos para la discusión.

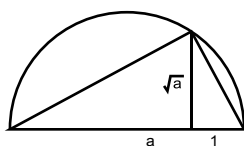
Se emplea como algoritmo para operar segmentos el siguiente resultado geométrico. Si se inscribe un triángulo en una semicircunferencia y uno de sus lados coincide con el diámetro, como se muestra en la Figura 1, se obtiene un triángulo rectángulo. Así mismo, al trazar la altura del triángulo correspondiente a la hipotenusa, como se muestra en la Figura 2, se puede verificar que ese segmento corresponde a la media geométrica de los segmentos y el segmento unidad (1), a esto lo denominamos el *criterio de la media geométrica*.

Figura 1. Triángulo rectángulo inscrito en la semicircunferencia



Fuente: Elaboración propia

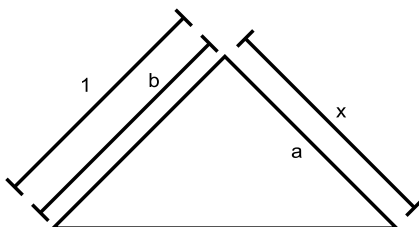
Figura 2. Criterio de la media geométrica



Fuente: Elaboración propia

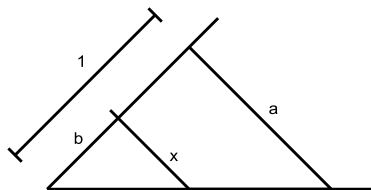
Otra herramienta geométrica empleada para operar segmentos es la siguiente: dados dos segmentos de magnitudes a y b , respectivamente, se tiene \sqrt{ab} . Necesariamente, entonces, su producto se puede obtener geoméricamente arreglándolo como se muestra en la Figura 3, si $b > 1$, o en la Figura 4 ($b < 1$). En el arreglo se tiene que a y b son segmentos paralelos, con ello se logra pares de triángulos semejantes. Haciendo uso de la proporcionalidad de sus lados homólogos para cada caso, se verifica que el producto de a y b es el segmento \sqrt{ab} . A dicho algoritmo lo denominamos *criterio de la semejanza*.

Figura 3. Criterio de semejanza para b mayor que la unidad



Fuente: Elaboración propia

Figura 4. Criterio de semejanza para b menos que la unidad



Fuente: Elaboración propia

La justificación de ambos criterios para operar números —en este caso magnitudes de segmentos— se fundamenta geoméricamente. Para el *criterio de la media geométrica* se pone énfasis en el concepto de semejanza entre triángulos rectángulos y en la igualdad o equivalencia de sus lados (es decir, la razón entre sus lados homólogos). Para el *criterio de semejanza* se basa en proporciones que son igualdad de razones. Pero no basta con entender eso. Si se quedan a nivel exclusivamente operatorio o algorítmico, se restringirá la construcción de un significado que, veremos, resulta fundamental para la comprensión de la función exponencial.

Profundizando aún más en la idea, se afirma que el criterio de la media geométrica no solo es un resultado algorítmico, pues en él subyacen las “prácticas” de la comparación y de la medición. La altura de la hipotenusa es un segmento, por lo tanto, tiene magnitud y esta es susceptible de medirse. Para lograrlo, hay que construir una unidad de medida, dicha unidad de medida es el 1 en la figura. El establecimiento de la unidad de medida es requisito indispensable para establecer la medida de la altura.

En el criterio de la semejanza se usan las razones de sus respectivos lados homólogos que están sujetos a una práctica de *comparar* y luego a la de *medir*. Galo (2019, p.235) señala que la comparación en la geometría de Euclides es una praxis recurrente, por lo que puede considerarse que la identificación de relaciones dadas permite encadenar comparaciones para establecer que las relaciones entre sus elementos (en nuestro caso, rectas) sean de igualdad, desigualdad o equivalencia.

Cantoral, Montiel y Reyes (2015) señalan que, desde la perspectiva del programa socioepistemológico, se promueve el desarrollo del pensamiento matemático sobre la base de prácticas que están asociadas a acciones y actividades en contextos determinados. Para nuestro caso, el geométrico y numérico, pues para el caso de la media geométrica si, entonces la altura será y y si x , entonces, la altura será x .

Al regresar al tema de los niveles de reproducibilidad señalados, se tendría que decir que lograr el dominio de los algoritmos en forma operativa en los estudiantes para encontrar magnitudes de segmentos sería un ejemplo característico de reproducibilidad externa. Construir la idea de que son una herramienta útil, en nuestro caso, para la medición, es decir darle un valor de uso a la medición caería en el nivel de reproducibilidad interna. Poniendo atención en este punto, podríamos aducir que el papel desempeñado por el profesor es apoyar a los estudiantes a alcanzar estos dos niveles, lo que comporta una figura del profesor como coadyuvante de la construcción de significados.

El profesor que ha alcanzado problematizar dicho conocimiento planteado en la situación y que logra remontar con sus estudiantes el aspecto algorítmico (alcanzando a construir su significado como herramienta de medición) está logrando establecer una nueva y potente relación con el conocimiento matemático. Acorde con el desarrollo profesional docente, construido desde el enfoque de la socioepistemología, es un profesor en proceso de empoderamiento (Reyes-Gasperini, 2016a, p.26): no es conocer más, es poner en uso lo que se conoce; dicho de otra manera, es alcanzar el saber.

Como paréntesis de la discusión, anticipamos que lo que buscamos comunicar en este escrito en relación con la noción de desarrollo profesional docente del profesor de matemáticas es que no basta con conocer más matemática, sino que hay que problematizar la que se conoce y lo que dicta el currículo para producir un rediseño del discurso matemático escolar.

2.5 Hacia la construcción de la exponencial 2^x

Observar la presencia de las prácticas de comparar y medir y ponerlas en uso, es resultado de la problematización del saber que,

para el caso de la situación que estamos revisitando, posibilita dotar de significado a un comportamiento numérico y relacional asociado con la noción de función exponencial, como se discutirá más adelante.

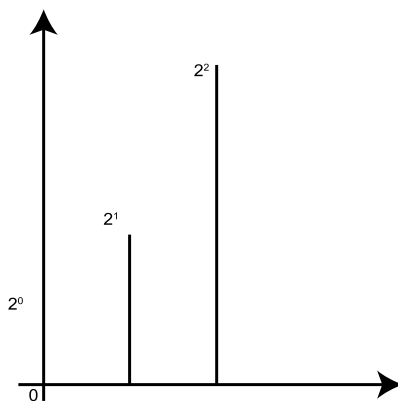
En la segunda parte de la secuencia que discutimos se emplean los algoritmos o procedimientos de la media geométrica y la semejanza. La tarea que se propone es ubicar seis puntos en el plano cartesiano correspondientes al trazo de la gráfica de la función 2^x restringidos al intervalo $[0,2]$.

2.6 Construcción geométrica

Se han trazado los segmentos de magnitudes 2^0 , 2^1 y 2^2 que nos sirven de guía para ubicar los puntos $(0,2^0)$, $(1, 2^1)$ y $(2, 2^2)$. A los estudiantes se les solicita localizar los puntos $(\frac{1}{2}, 2^{\frac{1}{2}})$, $(\frac{1}{4}, 2^{\frac{1}{4}})$, $(\frac{3}{4}, 2^{\frac{3}{4}})$, $(\frac{5}{4}, 2^{\frac{5}{4}})$, $(\frac{3}{2}, 2^{\frac{3}{2}})$ y $(\frac{7}{4}, 2^{\frac{7}{4}})$ y para ello deberán obtener los segmentos de magnitudes $2^{\frac{1}{4}}$, $2^{\frac{1}{2}}$, $2^{\frac{3}{4}}$, $2^{\frac{5}{4}}$, $2^{\frac{3}{2}}$ y $2^{\frac{7}{4}}$, empleando únicamente procedimientos geométricos. Además, se les pregunta si es posible localizar el punto $(\frac{1}{8}, 2^{\frac{1}{8}})$, y si es posible obtener más puntos siguiendo este procedimiento.

Como se puede observar, en la Figura 5 se dan tres segmentos indicando sus magnitudes por 2^x , sin marcar las coordenadas. El propósito de la actividad es que se sigan trazando segmentos, no el cálculo de las potencias de 2. Se espera que el estudiante identifique la unidad en la figura para tomarla como referencia y utilizarla en los respectivos algoritmos a fin de encontrar los segmentos cuyas magnitudes se indican.

Figura 5. Ejes e información de referencia



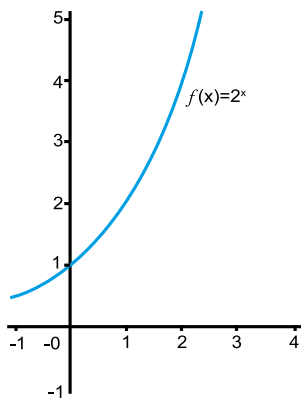
Fuente: Elaboración propia

2.7 Discusión de la actividad

En la Figura 5, mirándola desde una perspectiva aritmética, los estudiantes saben que $2^0 = 1$, y pueden generalizar el patrón algebraicamente, entendiendo que n es un número natural. Esa aritmética obliga a profesores y a estudiantes a responder el siguiente aspecto operativo: , ¿cómo justificar esa operación?

Los que afirman, por lo general lo recuerdan como una definición. Los que lo justifican, lo hacen vía $2^n = 2 \cdot 2^{n-1}$. No es claro para algunos que $2^0 = 1$, y, además, tienen el problema de interpretar 2^0 , lo que puede enredar la justificación. Es decir, 2^0 representa un gran problema para el estudiante significarlo. Una discusión de este tema se puede leer en Martínez (2002). Con el fin de ampliar la discusión y contrastar con lo que se pide en la tarea, se agrega a la Figura 6 un trazo de la función exponencial que no está en la actividad original, tal como es común encontrarla en cualquier libro de texto.

Figura 6. Gráfico de la exponencia



Fuente: Elaboración propia

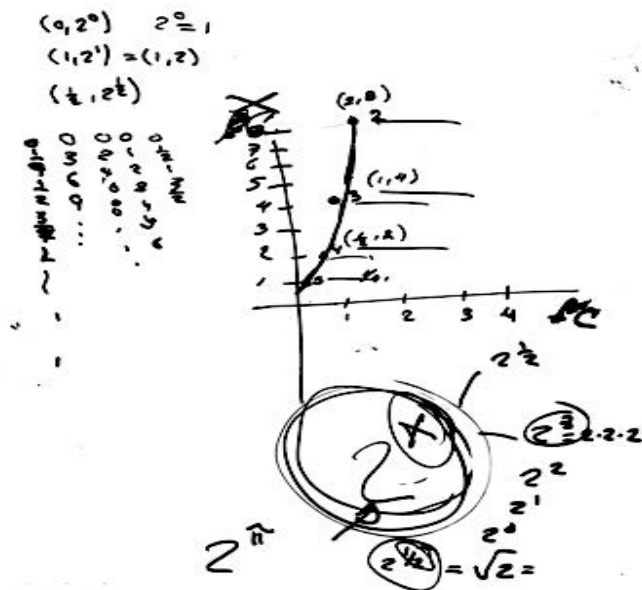
A partir de su análisis, podemos inducir de manera informal los siguientes aspectos: la función es creciente, continua; sabemos que tomando a 2 como base se cumplen con las condiciones de ser , y puede establecerse una correlación entre conjuntos de números cuya regla de relación es . A partir de dicha relación entre los conjuntos de e y pensando con una perspectiva aritmética, podemos suponer que para cualquier número que tomemos en el eje siempre es posible realizar la operación 2^x .

Esto lleva al estudiante a un alto nivel de abstracción, pues estaríamos haciendo uso de una versión escolar de continuidad que dice: “Una función es continua si su trazo gráfico se puede realizar sin levantar el lápiz del papel”. Esto inducía al estudiante a suponer que siempre es factible realizar la operación siendo un número real, es decir entero, racional o irracional. Otro problema de significación lo representa efectuar la operación , el criterio de la multiplicación múltiple, como en el caso de un número n natural, no permite darle un significado. La exploración de la función exponencial desde el programa aritmético y algebraico limita la significación de su naturaleza (Spivak, 1970, p.424).

3. Las producciones de los estudiantes

Se observan tres producciones de equipos estudiantiles tal como se presentan en las Figuras 7, 8 y 9.

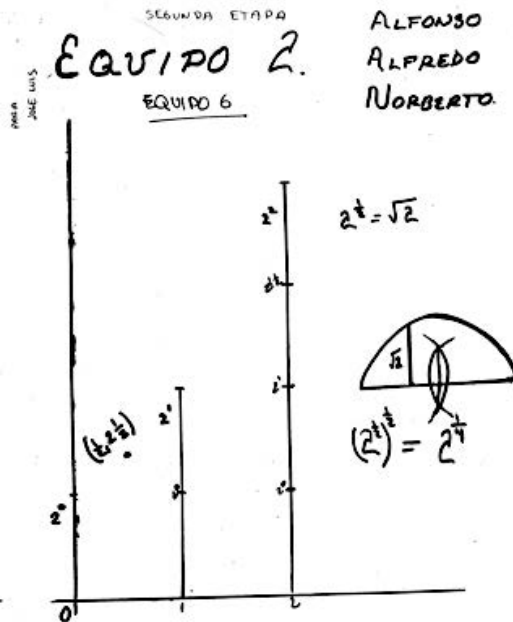
Figura 7. Tarea ejecutada por el grupo 3



Fuente: Elaboración propia

Se construyen pares ordenados. Se hace un trazo continuo y se colocan coordenadas sobre el trazo. No hay evidencia de qué signifiquen los demás puntos en el trazo continuo. En la parte inferior, como se muestra, es patente la búsqueda de una salida aritmética a las potencias.

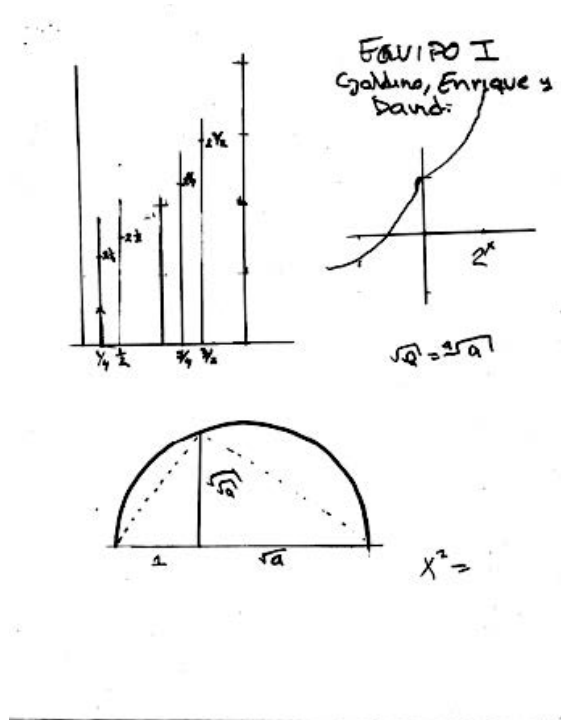
Figura 8. Tarea ejecutada por el equipo 3



Fuente: Elaboración propia

No hay un trazo continuo. Se interpretan las potencias desde una perspectiva aritmética. El criterio de la media geométrica les da valores, es decir, números que se traducen en coordenadas, pero no en *magnitudes de segmentos*.

Figura 9. Tarea ejecutada por el equipo 2



Fuente: Elaboración propia

Se dan cuenta de que el criterio de la media geométrica les da segmentos. Colocan segmentos en el plano, hecho que los hace comparables. El trazo de la función lo hacen continuo, puede ser que esté sugerido por los segmentos obtenidos. Sin embargo, en la rama derecha del eje Y sigue la lógica de los segmentos, es decir, lo sugieren. La rama izquierda del eje Y del gráfico, en la que no hay ausencia de segmentos, no proporciona una guía y, por tanto, el trazo continuo resulta erróneo.

Es importante señalar que cada equipo de estudiantes estuvo acompañado por un profesor. Los docentes, a su vez habían, participado en una larga tarea de apropiación de la secuencia

trabajándola y discutiéndola en grupo con el equipo diseñador. Entre las actividades de planeación se acordó una estrategia de acompañamiento a los equipos, así como la naturaleza de las interacciones del profesor con los estudiantes, las que fueron fuertemente modificadas por los profesores. Estas se pueden conocer a profundidad en Lezama (2003, p.83).

De la discusión emprendida para este escrito, se retoma únicamente aquella conclusión que alude al desempeño de los profesores (Lezama, 2005):

El profesor juega un papel determinante en el proceso de reproducción de situaciones didácticas; es el polo del sistema didáctico (profesor, estudiante, saber) que requiere ser más activo y flexible. Debe modificar su mirada sobre la situación didáctica, pues tendrá que reformularla para sus estudiantes y posteriormente acompañarlos cuando la trabajen. Tal dinamismo exige en el profesor habilidades que van más allá del dominio disciplinar; sin embargo, al ser tantos los aspectos que necesita cubrir, es muy fácil que falle en alguno (p.358).

En el 2005 se afirmaba que el profesor debía modificar su mirada sobre la situación didáctica a partir de una observación detallada de su interacción con los estudiantes. Se reconocía en ello un esfuerzo genuino por lograr que los estudiantes comprendieran los algoritmos de la media geométrica y de la semejanza para luego aplicarlos en la construcción de puntos pertenecientes al gráfico de 2^x . A ese esfuerzo, Balacheff (1988, pp.525-527) lo denominó responsabilidad epistemológica: un interés genuino por ayudar a que el estudiante comprenda lo que hace. Sin embargo, su esfuerzo quedó, como señala Artigue, en el plano de los procedimientos y alejado de la comprensión. Podemos mirarlo en los tres ejemplos de trabajo de los grupos que se presentaron: no se pudo alcanzar la identificación de las prácticas claves o que subyacen a los algoritmos, comparar-medir, lo que los hubiera llevado a darse cuenta de la naturaleza del crecimiento de la exponencial 2^x .

El enfoque sobre la actividad del profesor no se focaliza sobre qué le falta aprender de matemáticas, sino en cómo se relacionó con varios componentes de su entorno profesional y contextual. *Se estudió cuáles*

son las prácticas que se requieren para entender al objeto, tal como nos dice Cantoral (Comunicación personal, 2019, agosto 23).

El programa de investigación socioepistemológico ha construido a la par de sus indagaciones un espacio de atención y acompañamiento al profesor en búsqueda de entender con detalle toda fenomenología de adquirir una nueva relación con el conocimiento matemático. A partir de esos estudios y apoyados en las categorías de la teoría socioepistemológica de Reyes-Gasperini (2016a; 2016b, p.189), se ha construido el concepto de empoderamiento docente, hecho que se discute en la segunda parte de este escrito.

3.1 Empoderamiento docente: sus ideas principales

La postura reconoce la importancia del cambio de relación con el conocimiento matemático escolar, como un elemento clave en el proceso de desarrollo profesional docente. Su fundamento teórico y pragmático se sostiene en la teoría socioepistemológica de la matemática educativa, la que ha permitido construir la noción de empoderamiento docente. Uno de los hechos más importantes que se ha vivenciado y evidenciado en el marco del trabajo colaborativo con los colegas profesores es el que se produce en el interior y entre los equipos, lo que habitualmente se denomina *formación de formadores*.

Ciertamente, se ha adoptado una postura para con el grupo de colegas profesores con quienes se trabaja, pero la idea de hablar de formación no cabe en este caso, por eso la aclaración de que así es como *habitualmente* se denomina. Desde la perspectiva del proceso de empoderamiento docente, no se podría decir que “hay empoderados que empoderan”, más bien se habla de un grupo de especialistas, cada uno en distintos ámbitos, que se reúnen para dialogar y construir estrategias que mejoren la educación, en particular, el área de matemáticas. Es decir, uno de los equipos que integran este diálogo tiene un objetivo, un faro claro, al cual buscan arribar y construyen una propuesta de ruta hacia él. En palabras teóricas, el faro es el cambio de la relación con el conocimiento matemático escolar y la ruta, su problematización. Sin embargo, no hay un solo camino, son múltiples y se construyen a partir de la problematización y dependen de las personas con quienes

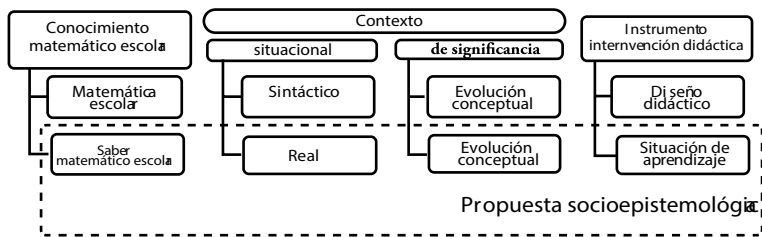
se interactúa: sus cuestionamientos, sus reflexiones, sus dudas, sus certezas, sus contextos, etc.

En el ejemplo que se discute a continuación se evidencia un proceso en el que se problematizó la matemática escolar relativa a la proporcionalidad directa. Para ello, con base en una situación de aprendizaje, que puede revisarse a profundidad en Reyes-Gasperini (2016a, pp.164-170), se propuso la reflexión detallada sobre la construcción de la razón como elemento para analizar la proporcionalidad.

3.2 Fundamentos de una situación de aprendizaje basada en prácticas

La propuesta socioepistemológica de una situación de aprendizaje se caracteriza principalmente en el trabajo con el *contexto situacional* real y el *contexto de significancia* basado en una evolución pragmática tal como se muestra en la Figura 10. El primero se refiere al escenario en el cual se enmarcan las actividades que se deben cumplir en la situación y el segundo, a la esencia matemática que se pondrá en juego, es decir, la evolución pragmática.

Figura 10. Propuesta socioepistemológica de una situación de aprendizaje



Fuente: Reyes-Gasperini (2016b)

Quienes están inmersos en un proceso de empoderamiento docente podrán interpretar que la esencia de la situación de aprendizaje radica en su contexto de significancia basado en la evolución pragmática y podrán efectuar nuevos diseños que modifiquen su contexto situacional. Lo importante es reflexionar sobre la necesidad de

mantener el fundamento epistemológico de la situación, es decir, su contexto de significancia con el fin de propiciar la construcción social del conocimiento matemático basado en prácticas. La situación de aprendizaje que se va a discutir está conformada por una secuencia de tres etapas:

La *primera etapa* se sustenta en que lo proporcional será manifestado como una noción intuitiva en el pensamiento humano (pensamiento cualitativo), carente de argumentaciones numéricas. Por ello, el trabajo se realizará con imágenes pictóricas que provienen de enunciados para abordarse en educación básica, y su reflexión se encaminará a lo relacional. Las relaciones serán establecidas mediante características cualitativas al nivel de comparación de tamaños o formas. Se trabajará con las relaciones cualitativas de las magnitudes hasta establecer un patrón, numérico o no, que permita caracterizar la relación.

Las tareas de la *segunda etapa* parten de haber explicitado la noción intuitiva respecto a *lo proporcional* que ha invitado a que el descubrimiento del patrón sea intrínseco en la etapa previa. En este momento se buscará su evolución hacia la noción relacional argumentada, es decir, se trabajará con la evolución pragmática de *comparar-equivaler-commensurar*, en particular con la dupla acción-actividad: *comparar-equivaler*. Y se trabajará en el tránsito entre la característica de la relación que se enmarca en la idea de que lo que ocurre en una de las variables deberá ocurrir en la otra (*razonamiento inter*), hacia la idea de caracterizar el tipo de relación que existe *entre* dichas variables (*razonamiento intra*). En este tránsito aparecerá el concepto de *constante de proporcionalidad - razón de cambio*, numérica o no, como noción matemática principal de lo proporcional, pero, sobre todo, como *relación adecuada entre las magnitudes*.

Para finalizar, habiendo transitado por la noción intuitiva y la noción variacional de *lo proporcional*, en este nivel se establece la necesidad de sintetizar la idea a través de *la noción métrica de lo proporcional*. Esto bien podría reducirse al nivel de simbolización de la proporcionalidad mediante múltiples elementos que caracterizan al objeto matemático instituido en las unidades temáticas del currículo (regla de tres, proporciones, recta que pasa por el origen, , entre otras), pero lo que se pretende, concibiendo lo realizado en las etapas previas, es alcanzar

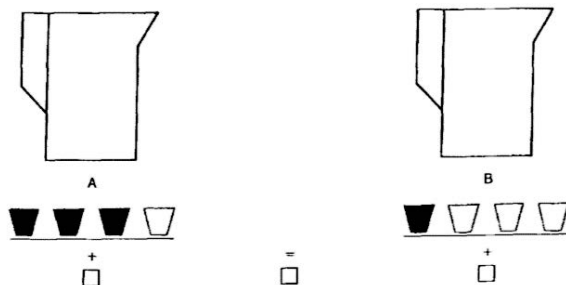
el conjunto de elementos que caracterizan a *lo proporcional*, es decir, la noción de justicia, de equidad, de establecer una relación adecuada entre las variables puestas en juego y desde allí, establecer procedimientos para su cuantificación, esto es, su evolución pragmática. En este momento, habremos de resignificar las nociones construidas en las etapas precedentes con el fin de centrar nuestra atención en las características de la relación establecida y su métrica.

Los lectores pueden encontrar en esta descripción, no solo un enunciado bien formulado, sino los fundamentos prácticos que subyacen a la escritura de dicho enunciado. Más allá de la buena pregunta, que en terminología mayéutica permite a los estudiantes “sacar su conocimiento”, en esta descripción nos encontramos con la estructura base que permite formular enunciados que propicien acciones específicas en el quehacer del estudiantado.

En las tareas de la situación que transitan de la etapa segunda a la tercera se encuentra un enunciado que se rediseñó de la propuesta realizada por Noelting (1980a, 1980b) sobre la toma de decisión entre jarras de jugo con distintos concentrados. Específicamente, el enunciado de la tarea que estaba dividida en tres partes fue el siguiente:

Parte A. Dadas dos jarras para hacer agua de sabor, se les vierten diferentes concentraciones de jugo y agua. Se quiere saber cuál de ellas tiene el sabor más fuerte a naranja, o bien, si ambas tienen igual sabor.

Por ejemplo:



- ¿Cuál de las dos jarras tendrá el sabor a naranja más fuerte?
- ¿Por qué?

Parte B. Considerando que cada par ordenado representa a una de las jarras (izquierda jarra A, derecha jarra B), siendo la primera componente la cantidad de vasos de jugo y la segunda componente la cantidad de vasos de agua, elige cuál de ellas tiene mayor sabor a naranja, o bien, si ambas tienen igual sabor (la tabla con los pares ordenados no se coloca en esta sección).

Parte C. A continuación, algunos ejemplos de respuestas obtenidas por otros individuos.

Enuncie si la respuesta es matemáticamente correcta y argumente por qué.

Explique cuál es el origen de la argumentación dada por la persona.

Jerarquice cada una de las respuestas y argumente con base en qué elementos fue realizada dicha jerarquización.

Durante el diseño de la tarea, como parte de la situación, y en su análisis a priori, no se había planteado a la gráfica como un posible argumento. He aquí el momento en el cual la problematización de la matemática escolar a partir de la vivencia de una situación de aprendizaje toma caminos que conducen al faro, aunque no hayan estado planeados. En este momento, quien está facilitando la interacción debe tener la soltura para dejar vivir el argumento, entenderlo, discutirlo y potenciarlo. Así se logra entender que un proceso de empoderamiento docente es un aprendizaje dialéctico.

3.3 Un episodio de problematización de la matemática escolar

Es oportuno estudiar qué fue lo que ocurrió. En la Figura 11 se muestra la tabla que se proponía en la parte B de la tarea mencionada en el apartado anterior, junto con las respuestas dadas por uno de los profesores que interactuó en el proceso de empoderamiento.

Figura 11. Respuestas de los docentes que participaron en el proceso de empoderamiento

8. (2,3) vs (1,1)	b	$\frac{2}{3} < \frac{1}{1}$
9. (2,2) vs (3,3)	igual	$\frac{2}{2} = \frac{3}{3}$
10. (2,2) vs (3,4)	A	$\frac{2}{2} > \frac{3}{4}$
11. (1,1) vs (3,3)	=	$\frac{1}{1} = \frac{3}{3}$
12. (1,2) vs (2,4)	=	$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$
13. (2,1) vs (3,3)	A	$\frac{2}{1} > \frac{3}{3}$
14. (2,3) vs (1,2)	A	$\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$

Fuente: Elaboración propia

Nota. Comparación de razones en las partidas.

Se analiza una significación que el profesor formula sobre el concepto de *razón* mediante la evolución de las argumentaciones desde una explicación basada en las prácticas hasta llegar a la justificación matemática formal (nótese en la Tabla 1).

Tabla 1. Resignificación de la idea de razón por parte de los profesores

Intervención del profesor	Interpretación y análisis
Yo puse que tienen la misma razón.	Esta fue la respuesta concreta de Óscar, tras argumentar a un nivel inicial.
La relación de cantidad del agua y de jugo es la misma: uno de jugo y dos de agua.	Las magnitudes son contextuales en la situación: “cantidad de agua y cantidad de jugo que explica la idea de una misma razón”; afirmando que esta es una relación entre las cantidades de las magnitudes enunciadas.
O sea, uno-dos y la otra es dos-cuatro . O sea, uno-dos, lo veo como un medio.	La primera estrategia fue construir razones/relaciones a partir del contexto . Luego, la estrategia fue comparar numéricamente las razones para lo cual usó el argumento de “ver a las razones como fracciones”. La frase “lo veo como” es un indicio de que las significaciones que les da a la razón y a la fracción son diferentes. Es decir, luego de darle un significado a la idea de razón, se procede a aritmetizar la razón para operar.
Dos cuartos, pues es un medio, entonces tiene la misma... la relación entre las dos cantidades es la misma.	Significa la idea de razón y usa la igualación de las fracciones para armar una proporción y concluir en que la relación entre las dos cantidades es constante, lo cual da significado a la noción de constante de proporcionalidad que emerge de la proporción armada. Este puede considerarse el argumento matemático formal de su primera afirmación.

Fuente: Elaboración propia

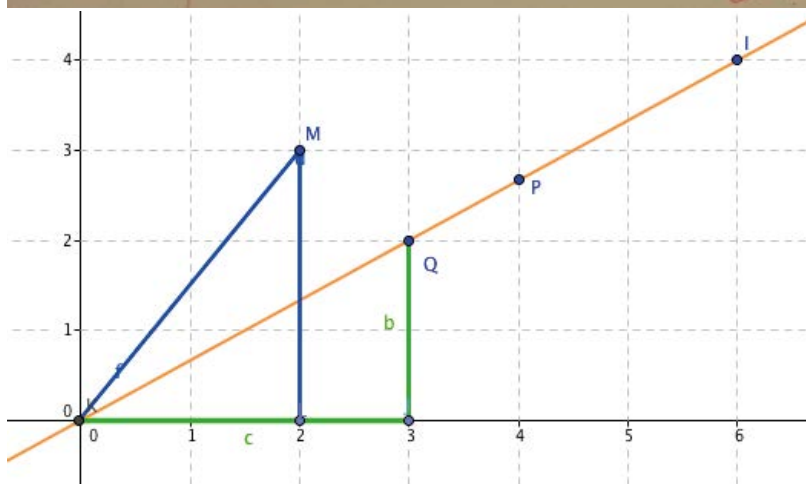
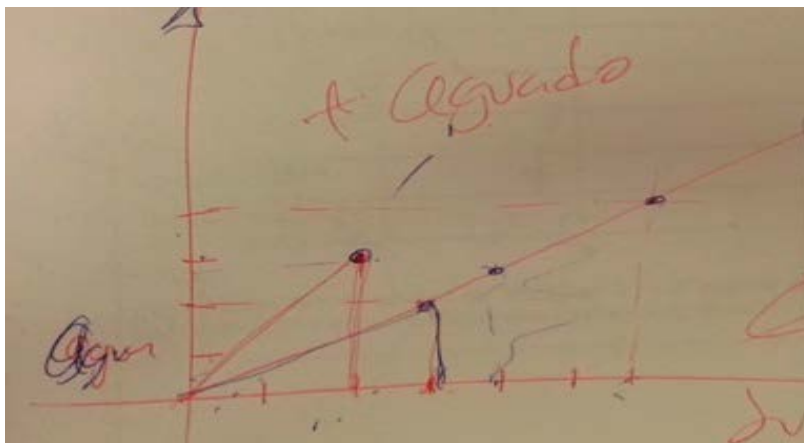
La interacción continúa con la afirmación del profesor respecto a la razón: “porque no lo veo como un número, sino como una relación”, a lo cual otra colega le responde: “como una relación sí, pero como un número no podría ser”.

Este hecho, demuestra cómo vive en los profesores la *aritmetización de la proporcionalidad* confrontada con la idea de razón como relación entre magnitudes, es decir, *lo proporcional*. Podemos conjeturar que este momento en la *proporcionalidad aritmética* se ve a la relación entre las cantidades como una *fracción*, mientras que en la *proporcionalidad variacional* se la ve como una *razón*.

El profesor argumenta, en un inicio, que los sabores de las jarras son iguales porque tienen la misma razón. Al interpretar la evolución de sus

argumentaciones observamos cómo su afirmación surge de localizar que *la relación entre la cantidad de agua y de jugo es la misma*. Es decir, *habla del mismo sabor* como la relación entre dichas cantidades *para justificar la igualdad numérica* de las razones (la proporción), en otras palabras, *el invariante es el sabor*. Con la argumentación de *comparar* las razones, válida matemáticamente, el profesor respondió de manera correcta y rápida a la mayoría de las partidas que se habían propuesto, Sin embargo, luego de dialogar sobre diversas estrategias, el profesor propuso una nueva, cuyo argumento fue la gráfica. En la Figura 12 se indica el trabajo del profesor al comparar dos jarras inventadas por él mismo. A la izquierda se encuentra el diseño del profesor; a la derecha, la reconstrucción hecha por nosotros.

Figura 12. Trabajo del profesor al comparar las dos jarras del ejercicio planteado




Fuente: Elaboración propia

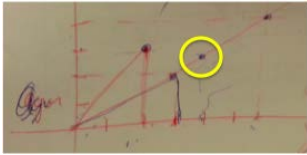
Profesor: Las gráficas también nos podrían servir... Suponiendo que... en la primera que era tres... puse aquí una gráfica que en las X es el jugo y la Y el agua. Entonces, puse que tres de jugo con dos de agua, ponemos este triangulito... y se supone que van a tener lo mismo si pusiera cuatro de jugo... no sé cuánta agua tendría... eso tendría lo mismo, la misma cantidad de jugo... Si pongo seis de jugo con cuatro de agua, esto, esto que prepare aquí va a tener lo mismo... entonces todo

lo que esté sobre esto (indica la recta) van a tener el mismo sabor y la misma porción de jugo con agua. Pero si se pasa, si queda arriba, ya va a saber más a agua, como es el caso de que, si fueran, aquí dos de jugo con uno, dos, tres de agua. Al estar acá arriba está más aguado. Entonces, para que sepa más a jugo, tiene que estar de aquí para abajo. Y si queda por arriba, queda más aguado.

A continuación, se presenta la Tabla 2.

Tabla 2. Resignificación de la idea de razón de cambio por parte de los profesores

Intervención del profesor	Interpretación y análisis
<p>Las gráficas también nos podrían servir... Suponiendo que... en la primera que era tres... puse aquí una gráfica que en las X es el jugo y la Y, es el agua.</p>	<p>Expone su nuevo argumento e identifica los elementos de la gráfica de la cual hará su análisis: eje X y eje Y.</p>
<p>Entonces, puse que tres de jugo con dos de agua , ponemos este triangulito...</p> 	<p>El “triangulito” del que habla está pintado de color azul y se refiere a la razón de cambio (lo cual se había discutido previamente) que compara el cambio en las Y (agua) respecto con el cambio en las X (jugo).</p>
<p>Y se supone que van a tener lo mismo.</p>	<p>“Lo mismo” se refiere a la relación entre el jugo y el agua y tiene intrínseca la noción de igualar o equivaler, a la vez que “lo mismo” significa “el mismo sabor”.</p>

Intervención del profesor	Interpretación y análisis
<p>Si pusiera cuatro de jugo... no sé cuánto de agua tendría... eso tendría lo mismo, la misma cantidad de jugo... Si pongo seis de jugo con cuatro de agua.</p> 	<p>Dado que la relación de agua a jugo es de 2 a 3, cuando el profesor ejemplifica cuánto le correspondería a 4 de jugo dice “no sé cuánta agua tendría”, pues no son números que permitan ningún razonamiento simple: aditivo simple, multiplicativo, inter ni intra. Aritméticamente sería: . Sin embargo, de lo que él sí está seguro es de que esa relación estará sobre la recta porque tiene el mismo sabor y lo marca (en la imagen se indica con un círculo amarillo). Es decir, la equivalencia se puede hacer aun sin conocer el valor numérico.</p> <p>Luego, cuando dice para 6 de jugo, inmediatamente afirma 4 de agua, pues podríamos asumir que usó un razonamiento inter: doble de jugo, doble de agua.</p>
<p>Esto, esto que preparé aquí va a tener lo mismo... entonces todo lo que esté sobre esto (indica la recta).</p>	<p>La recta ya no se considera una representación (una nueva presentación de lo que ya se tenía), sino que ahora es un dato en sí mismo que da información.</p>
<p>Van a tener el mismo sabor.</p>	<p>Que esté en la misma recta (pasando por el origen) significa que tienen el mismo sabor, es decir, significa la noción de pendiente de una recta proporcional a partir de la noción de sabor.</p>
<p>La misma porción de jugo con agua.</p>	<p>m es interpretado como “sabor”, y este será igual siempre que tenga la misma relación (comparar) de jugo con agua. No precisa de la interpretación numérica, sino que habla de la relación entre las magnitudes.</p>
<p>Pero si se pasa, si queda arriba, ya va a saber más a agua, como es el caso de que, si fueran aquí dos de jugo con uno, dos, tres de agua. Al estar acá arriba está más aguado. Entonces, para que sepa más a jugo tiene que estar de aquí para abajo. Y, si queda por arriba, queda más aguado.</p>	<p>La recta como gráfica toma significado a partir del análisis. Se hace una lectura del plano cartesiano completo a partir de la posición de la recta: más aguado arriba, más sabroso abajo.</p>

Fuente: Elaboración propia

La relación que presenta el profesor es una representación gráfica (recta) que indica el *sabor* y separa al plano cartesiano en regiones correspondientes a *intensidades de sabor*. Es decir, a partir de la noción de sabor se significó la idea de recta que pasa por el origen como la representación de una función de proporcionalidad directa. Nótese que el dominio usado por el profesor no incorpora a los negativos, pues está graficando explícitamente la situación contextual. La idea de que “pase por el origen” garantizaba que el sabor fuera el mismo para cualquier punto de la recta, ya que el sabor se obtenía como la relación, es decir, la razón entre la cantidad de jugo y la cantidad de agua. Así mismo, a partir de la ubicación de un punto en el plano pudo comparar la *intensidad del sabor*. En este caso, se significa a partir de la noción *desabor*, mientras que en la matemática escolar es presentada como única, numérica y estática:

$$m = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{Y}{X}$$

Posterior a esta reflexión, los colegas continuaron poniendo a prueba la estrategia construida a partir de la gráfica como argumento. Las partidas que antes se dificultaban, por ejemplo (3, 2) y (4, 3), ya no eran un problema. Así se entendió cómo se pasó de una relación aritmética con lo proporcional hacia una relación variacional donde la razón, como relación entre las magnitudes, toma un protagonismo indispensable para darle sustento a lo proporcional. Para terminar la tarea se dialogó sobre otro ejemplo, el caso de la relación entre distancia y tiempo, y quedó graficada la velocidad. Ahí se analizó que cuanto más cercana al eje Y estuviera la gráfica, mayor sería la velocidad. Este episodio concluyó con el siguiente diálogo reflexivo:

Profesora:	En estadística hay una, ¿no? ¿Cómo era? La curva de la campana... ¿podría ver eso? La relación.
Investigadora:	Todos los puntos están hablando de las relaciones. Entonces, lo que está acá graficado no es el agua, no es el jugo, es la relación entre esas dos. Por eso es que la función cuyas variables son estas... Pero la función habla de la relación entre las variables.
Profesor:	Sí. Como que se acostumbra uno a verlo por separado.

La profesora explicita la idea de la relación y el profesor cuestiona aquello a lo que uno está acostumbrado en las funciones: ver las magnitudes por separado, pues la idea no es ver ni el jugo ni el agua, sino la relación entre ellos. Este hecho explica empíricamente la necesidad de comenzar por identificar y comparar magnitudes para establecer una relación, como se propuso en la etapa factual, pues existe la dificultad de mirar ambas magnitudes relacionadas.

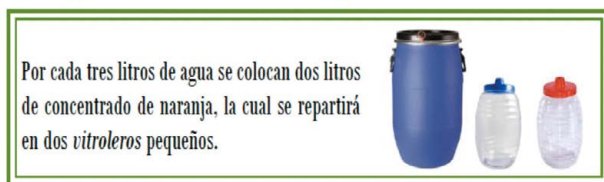
3.4 Un aprendizaje mutuo

Tras la interacción, la investigadora diseñó una nueva situación de aprendizaje que pudiera confrontar de manera gráfica una relación lineal proporcional y una no proporcional, a partir de la significación de la razón de cambio y la razón entre las variables.

De la situación de aprendizaje titulada “Las mezclas”, retomaremos preguntas específicas que son de interés para este escrito (Figura 13).

Figura 13. Enunciado de la tarea diseñada a posteriori

Tarea 1. Un barril grande de color azul tiene la siguiente mezcla:



Para llenar los vitroleros se usa un **medidor** de un litro con el que se toma el preparado del barril grande. (Considérese el preparado con una distribución homogénea).

- ¿Qué proporción del litro será de concentrado de naranja? Explique su respuesta.
- En el vitrolero de tapa azul, que estaba vacío, se coloca 20 veces el contenido del **medidor** y se llena. En el vitrolero de tapa rojo sólo se llega a colocar 15 veces el contenido del **medidor** hasta llenarse. Si ambos vitroleros tienen la misma capacidad, ¿cuáles pueden ser los motivos por los que se llenó antes uno que otro?

Fuente. Elaboración propia

En este caso, la primera etapa propone realizar el experimento de explicar de manera contextual los motivos por los cuales el vitrolero

de cambio constante (pues eso caracteriza a cualquier relación lineal), sino la relación constante entre la razón de sus variables. Para ello, tal como dijo el profesor durante la problematización, es indispensable que se reflexione sobre una mirada variacional de lo proporcional y no que se quede en una mirada aritmética.

¿Qué es lo relevante de todo este apartado? Que al final de las vivencias y las evidencias no hay empoderados que empoderan, sino hay colegas que se encuentran, dialogan, problematizan y aprenden de manera dialéctica, de eso se trata el empoderamiento docente.

4. Conclusiones

Se ha discutido, a partir del concepto de reproducibilidad de situaciones de aprendizaje, situaciones que escolarmente pueden ser muy variadas, desde la repetición de una misma explicación o tareas operativas centradas en prácticas algorítmicas hasta situaciones estructuradas de manera robusta y fundamentadas en teoría. Todas ellas enfrentan, desde un enfoque teórico, la dificultad de repetir o reproducir el logro didáctico que se propone en cada uno de los escenarios donde se trabaja. La reproducibilidad de efectos didácticos estables y generalizables devienen en ilusión si no se pueden garantizar los dos niveles de reproducibilidad. El logro en la repetición de procedimientos puede ser bastante estable, pero esto puede alcanzarse con el costo de una pobre o nula construcción de significados que ninguna experiencia posterior le permita resignificar.

La búsqueda de reproducibilidad interna con significados o, podríamos decir rica en significados, es difícil o imposible de repetir, o mejor dicho requeriría de más indagación y nuevas formas de investigar como propone Artigue. En la discusión del ejemplo de lo exponencial, se evidencia que a un maestro, por inercia escolar o como resultado del discurso escolar preponderante, le cuesta trabajo problematizar las matemáticas que saben y discuten con sus estudiantes, vive una dinámica ausente de las prácticas fundacionales de eso que enseña.

Por otra parte, en el ejemplo discutido sobre lo proporcional, se da cuenta de la reproducibilidad interna, en palabras de Artigue (2018, p.25), o invariancia del contexto de significancia, en palabras de Re-

yes-Gasperini (2016a, p.58). La reflexión sobre el ejemplo del sabor es un ejemplo interesante y profundo de cómo el profesor y, desde luego, sus estudiantes en un contexto material que posibilita significados de manera concreta, pueden plantear nociones y prácticas con lenguaje distinto, pero esclarecedor y con mucho sentido, está en el camino de ir reconstruyendo, dependiendo de las necesidades prácticas. Si entiende la idea del sabor, puede ir entendiendo cuándo cambia, y sabe qué es lo que está cambiando y podrá representar gráficamente el complejo y abstracto objeto matemático, y ya podríamos decir está encarnado en lo que hace y la forma que lo piensa.

Tendrá una nueva alternativa de guía aquel profesor que, sin temor a la pérdida de los formalismos y discursos impuestos, explore prácticas, las aplique y las haga vivir a sus estudiantes. Así estará construyendo una nueva relación con el conocimiento y, por tanto, estará en proceso de empoderamiento. Este concepto es al que nos comprometemos estudiar con mayor profundidad.

Se ha colocado al docente en el centro de esta discusión y se ha introducido el enfoque socioepistemológico (centrado en prácticas) por ser el elemento material de la construcción del conocimiento matemático. Una reflexión a partir de la reproducibilidad de situaciones de enseñanza es, entonces, que un elemento característico que evidencia al proceso de empoderamiento docente es darse cuenta y considerar como fundamental la reproducibilidad interna.

Referencias bibliográficas

- Artigue, M. (1984). Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques. Thèse d'Etat (première partie). <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01250658/document>
- Artigue, M. (1995). *Ingeniería didáctica*. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en Educación Matemática*. Una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamérica.
- Artigue, M. (2018). Didáctica matemática y reproducibilidad. *Educación Matemática*, 30(2), 9-32. DOI: 10.24844/EM3002.01
- Balacheff, N. (1988). *Étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège*. Thèse de doctorat d'état és-ciencias didactique des mathématiques. Université Joseph Fourier, Grenoble.
- Biesta, G. (2010). Why 'What works' still won't work: From evidenced-based education to value-based education. *Studies in Philosophy of Education*, 29, 491-503.
- Bourdieu, P. (2003). *Cuestiones de sociología*. Ediciones Istmo.
- Brousseau, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(1), 37-128.
- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-112.
- Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en matemática educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(1), 5-7. DOI: 10.12802/relime.13.1810
- Galo, S. (2019). *El estudio del cambio en Geometría Euclidiana* [Tesis de Maestría no publicada]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- Lezama, J. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas* [Tesis de Doctorado no publicada]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- Lezama, J. (2005). Una mirada socioepistemológica al fenómeno de la reproducibilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8(3), 339-362.
- Martínez, G. (2002). Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones matemáticas de los exponentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 5(1), 45-78.
- Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I: Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics*, 11, 217-253.
- Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II. Problem-structure at successive stages. Problem-solving Strategies and the Mechanism of Adaptive Restructuring. *Educational Studies*

in Mathematics, 11(3), 331-363.

Reyes-Gasperini, D. (2016a). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa de intervención para la transformación y mejora educativa* [Tesis de Doctorado no publicada]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.

Reyes-Gasperini, D. (2016b). *Empoderamiento docente y socioepistemología: un estudio sobre la transformación educativa en matemáticas*. Editorial Gedisa.

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). Discurso matemático escolar y exclusión. Una visión socioepistemológica. *Bolema*, 28(50), 1525-1544.

Wiseman, A. (2010). The uses of evidence for educational policy making. Global contexts and international trends. *Review of Research in Education*, 34(1), 1-24.

Spivak, M. (1970). *Cálculo infinitesimal*. Editorial Reverté.

CAPÍTULO 4

ETNOMATEMÁTICA: UNA ALTERNATIVA PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Roxana Auccahuallpa Fernández
roxana.auccahuallpa@unae.edu.ec

Universidad Nacional de Educación-UNAE
Azogues, Ecuador

1. Introducción

La etnomatemática como programa de investigación es una tendencia de la educación matemática que surgió en la década de los ochenta. Su objetivo primordial es valorar las matemáticas practicadas por diferentes grupos culturales, etnias y nacionalidades a través de las actividades o prácticas culturales como contar, medir, localizar, comparar, jugar, explicar (Bishop 1999; D' Ambrosio, 2013, p.30) y pretende contribuir tanto a la práctica en el salón de clase como en el campo de investigación de la educación matemática. Además, debemos comprender que la etnomatemática no solo se limita a las matemáticas de los pueblos conquistados, sino también a la cosmovisión de los pueblos expresada en las maneras de explicar el mundo y conocer su contexto cultural.

2. ¿Por qué la etnomatemática?

Es una pregunta que conlleva a demostrar que no existe una única forma de comprender el mundo. El origen de la etnomatemática se dio en torno a la sobrevivencia de los pueblos, nacionalidades, grupos y sus culturas. Para Souza-Lima (2013, p.167), la etnomatemática se entiende como una matemática no académica, una matemática no formal desarrollada fuera del ambiente escolar, se hace más importante y cobra trascendencia al explicar y comprender las prácticas o actividades culturales de sus propias y respectivas culturas, ya sean de Ecuador, Perú, Bolivia, Brasil, entre otras. A partir de la cultura, los pueblos muestran la manera de comportarse, su lenguaje, formas de comunicación, su organización social, sus formas de contar, medir, localizar, jugar, diseñar, navegar, etc. Incluso se trabaja los diálogos de saberes y transmisión de conocimientos que sirven para comprender las matemáticas de las culturas.

La etnomatemática, en esencia, se refiere a saberes cotidianos y actividades culturales propias de un grupo, etnia y nacionalidad. Desde esta perspectiva, se busca reconocer y valorizar este conocimiento en la faceta de la matemática, incluso lleva a pensar que la disciplina implica una forma de contextualización o forma metodológica de

enseñanza, por lo que el programa de la etnomatemática analiza todo esto, entiende y recupera las *thicas*¹ de los *mathemas* de los pueblos y grupos conquistados.

Evidenciar a la etnomatemática como una alternativa para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es el propósito de este capítulo. Para ello, se presenta un estudio descriptivo y reflexivo de la importancia de la etnomatemática para el proceso de enseñanza y aprendizaje en la educación básica y su relación con la educación matemática.

3. La etnomatemática y sus características

Los niños juegan y tienen sus propios mathemas en los ambientes de thicas en sus propias ethnos,
UBIRATAN D' AMBROSIO

La etnomatemática es un programa de investigación que impulsa el respeto a la diferencia, a la diversidad, a la solidaridad y a la cooperación entre los grupos, lo que aporta a la construcción de un mundo más justo y digno para todos (Fuentes-Leal, 2014). Contribuye a la construcción de un diálogo de saberes, prácticas y conocimientos entre diferentes pueblos, grupos y etnias, además desmitifica el carácter universal de la existencia de una sola matemática, la occidental (las matemáticas de Leibniz y Newton), y la ve como una construcción cultural contextualizada a partir de las matemáticas de los pueblos, grupos y etnias.

Como campo de investigación, y acorde con las exigencias del siglo XXI, la etnomatemática está circunscrita en el enfoque sociocultural en la educación matemática. Ha tenido múltiples interpretaciones y definiciones desde su surgimiento en el Brasil, gracias al pensamiento de Ubiratam D' Ambrosio. Esta variedad depende del autor, investigador o del momento histórico en el cual fueron presentadas, lo que la ha hecho crecer conceptualmente. Desde la propuesta de Ascher (1986), quien la caracteriza como las matemáticas de pueblos no letrados, ha pasado a la propuesta de Alan Bishop (1999, p.28) quien la define como la relación entre las matemáticas y la cultura. La definición etimológica de la disciplina, presentada por D' Ambrosio

¹ *Thicas*, se refiere a las maneras, formas, artes y técnicas para atender, comprender, explicar y aprender las *mathemas* de los grupos y culturas (*ethnos*).

(1985, 45) está basada en tres raíces: la primera *etno*, que se refiere a los diversos ambientes: social, cultural, natural; la segunda es *mathema* que significa ‘explicar, entender, enseñar, manejarse’; y la tercera es *thica*, que viene de la raíz griega *tecni*, que quiere decir artes, técnicas. Por consiguiente, la disciplina se entendería como las artes, técnicas de explicar, de entender, lidiar con el ambiente social, cultural y natural de los pueblos, grupos, etnias.

En adición, la etnomatemática surge como una tendencia en la educación matemática del siglo XX que busca revalorizar y conocer las matemáticas no académicas practicadas por los grupos, etnias, nacionalidades y diversas culturas. Estos estudios se han intensificado desde la década del 70 en el Brasil. Para D’ Ambrosio (2013, p.21), no es una tendencia de la educación matemática terminada ni definida de forma absoluta, es un programa de investigación que va evolucionando cada vez más. Explica que no se trata de proponer otra epistemología en el campo de la investigación, menos sin entender la aventura de la especie humana que busca el conocimiento y la adopción de comportamientos. Gerdes (1989) inscribe a la etnomatemática desde una perspectiva educacional emancipadora relacionada con la reivindicación de la matemática a través de la cultura autóctona de las comunidades, más allá de un conjunto de prácticas y actividades cotidianas culturales del pasado, las cuales desarrollaron una concientización de las matemáticas históricamente excluidas por los gobernantes y políticas.

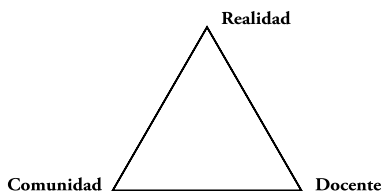
Lo más importante es que a través de esta disciplina se promueven objetivos sociales, culturales y políticos, algunos de estos son la creación de una conciencia matemática de pueblos históricamente excluidos como los incas, cañaris, mapuches, aymaras, kichwas, entre otros. Dicho esto, la etnomatemática, busca reconsiderar la historia de las matemáticas, los modelos y procesos cognitivos de su aprendizaje, los objetivos del contenido y significado de la educación matemática y pasar a considerar en el rol cultural que esta ejerce, además de reconsiderar a la disciplina por sí misma sin perder las *mathemas* de los pueblos y sus conocimientos.

Autores como Knijnik (2012) y Wanderer, Giongo y Duarte (citado por Fuentes-Leal, 2014) presentan a la etnomatemática como un campo de investigación interesado en examinar las prácticas culturales

fuera de la escuela o extraescolares, asociadas con racionalidades que no son iguales a la racionalidad occidental, a partir de estas se pensarán nuevas posibilidades para la educación matemática practicada en la escuela. Es más, para Fuentes-Leal (2014), las políticas creadas por el conocimiento dominante (matemáticas occidentales) esconden y marginan determinados contenidos y saberes de las comunidades y contextos. Se pregunta así ¿cómo construir otras formas de escolarización, otra escuela que incluya otros contenidos y no imponer aquellos que usualmente están en el currículo escolar?, ¿cómo integrar los conocimientos de los pueblos, grupos y etnias para vincularlos con el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas? En la actualidad, las evaluaciones van dirigidas a un currículo escolar que excluye saberes y prácticas de los grupos, nacionalidades y etnias, este es el caso de Ecuador a través de las evaluaciones de la prueba Ser Bachiller y otras.

En Europa, María Luisa Olivera y Blanco-Álvarez (2016) contribuyen a complejizar a la etnomatemática como campo de investigación, como respuesta a las inquietudes epistemológicas de un grupo de científicos, investigadores y educadores que comparten una concepción plural del conocimiento matemático. Para las autoras, este campo debe estar relacionado con un movimiento relativista posmoderno en el campo de las matemáticas, y presentan a la disciplina como un campo que ha aportado a la creación de conciencia de la diversidad epistemológica, al hacernos preguntar cómo y quién valida el conocimiento. Además, proponen la realidad como una construcción social, en la cual no hay objetividad, ya que todo constructo científico emerge de una cultura con características propias, entre ellas las matemáticas (Figura 1).

Figura 1. Triángulo didáctico comunitario



Fuente: Elaboración propia (2019)

D' Ambrosio (2004), padre de este programa, aclara que considera el prefijo *etno* de una forma muy amplia, pues:

Etno se refiere a grupos culturales identificables, como, por ejemplo, sociedades nacionales, tribus, grupos sindicalistas y profesionales, niños de un cierto grupo etario, etc. e incluye memoria cultural, códigos, símbolos y hasta maneras específicas de razonar e inferir. Del mismo modo, la matemática también es vista de forma más amplia por incluir contar, medir, hacer cuentas, clasificar, ordenar, inferir y modelar (pp.17-18).

Por lo que el sufijo *etno* no excluye a los grupos, en las palabras de D' Ambrosio, sino que es una forma de atender las *mathemas* de los grupos, pueblos y etnias a partir de la institucionalización del programa de etnomatemática que también podría ser denominado matemática de la diversidad, matemáticas y cultura, antropología de la matemática, entre otros.

3.1 ¿Qué es hacer y saber hacer?

El constructor tiene sus habilidades –ticas de mathemas en su ambiente– ethno.

UBIRATAM D' AMBROSIO

Los conocimientos matemáticos surgen a partir de una situación de la realidad del conocer y saber hacer. Para D' Ambrosio (2013, p.47), la construcción del conocimiento corresponde a una coherencia cultural identificada por los modos de explicaciones, filosofías, teorías y acciones como por las conductas cotidianas. Para Alan Bishop (1999, p.35), enseñar a los niños a 'hacer matemáticas' es una manera de hacer y saber hacer, puesto que en la educación matemática interesa principalmente la manera o forma de conocer, es decir, se trabaja su enseñanza desde el conocimiento matemático y se obvia este conocimiento desde una perspectiva cultural, la cual es fundamental en países que son pluriculturales e interculturales como América Latina.

Desde esta perspectiva cultural y antropológica, se puede aprender y enseñar matemáticas a partir de prácticas y actividades culturales propias que plantea la etnomatemática (denominados procesos o actividades culturales de los pueblos). Naturalmente, estos modos

o maneras se apoyan en procesos de medir, contar, localizar, jugar, clasificar, diseñar, navegar, comparar representaciones e inferencias que se dan de maneras diferentes en las diversas culturas, formas que se han ido transformando a lo largo del tiempo.

Para una situación contextualizada, Rosa y Orey (2016) afirman que el objetivo de la etnomatemática es analizar cómo a lo largo de su evolución la especie humana desarrolló y difundió artes y técnicas con el propósito de entender, explicar, lidiar con el ambiente natural, social y cultural, ya sea próximo o distante, con la capacidad de modificarlo a través del tiempo, dado que muchos conocimientos y prácticas cambiarán de generación en generación por el modo de supervivencia.

La etnomatemática en la última década ha crecido en el número de investigaciones como lo demuestran las publicaciones. Es concebida como una matemática practicada por grupos culturales, tales como comunidades urbanas y rurales, grupo de trabajadores, clases profesionales, niños de cierta franja etaria, sociedades indígenas, y otros grupos que se identifican por objetivos y tradiciones comunes a los grupos (D' Ambrosio, 2008, p.9). Consiste en varias formas y técnicas de explicar y lidiar con un conocimiento, es una forma de pensar matemáticas y hacer matemáticas desde los diferentes grupos culturales. Existe la posibilidad de que el programa de etnomatemática se torne un potencial metodológico para el aprendizaje significativo del contenido y facilite la construcción del conocimiento matemático de los futuros docentes.

Dado que el programa posee un papel social y ayuda en la construcción social de la realidad, es importante utilizar propuestas de enseñanza dirigidas a los aspectos pedagógicos que se relacionan con el contexto político, social, económico, ambiental y cultural de los profesores. En ese sentido, se puede asociar las matemáticas con los aspectos culturales del conocimiento matemático de grupos culturales distintos (polos) al valorizar el intercambio de conocimientos que ocurren en el ambiente del aprendizaje a distancia (Rosa y Orey, 2016).

Vithail y Skosmose (1997) propusieron cuatro perspectivas principales de investigación en etnomatemática: (1) *histórica*, investiga la reconstrucción de la historia de la matemática en diferentes culturas; (2), *antropológica*, estudia las prácticas matemáticas de grupos

culturales identificados; (3) *cotidiana*, estudia la actividad matemática en contextos no escolares, por ejemplo, las estrategias de resolución de problemas de la vida diaria como la compra y venta en el mercado; (4), *educativa*, investiga la articulación de los resultados de la etnomatemática con el currículo del área. Dicho esto, la educación matemática debe partir de los saberes, conocimientos y prácticas culturales de los grupos que se vinculan con los conocimientos del currículo escolar, enfatizando el contexto en el que se encuentren los educandos.

La propuesta pedagógica de la etnomatemática es hacer de la matemática algo vivo, al lidiar con situaciones reales en el tiempo (ahora) y en el espacio (aquí). Y a través de la crítica se puede cuestionar el aquí y el ahora, “al hacer eso, nos sumergimos en las raíces culturales y practicamos la dinámica cultural” (D’ Ambrosio, 2004, p.46).

3.2 La etnomatemática en el salón de clase

Al inicio, la etnomatemática fue considerada como un programa de investigación en historia y filosofía de la matemática con la intención de reconocer el conocimiento matemático de los diferentes grupos, nacionalidades y etnias. ¿Qué contribuciones ha tenido la etnomatemática como alternativa para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el salón de clase?

La disciplina en el siglo XXI ha tenido y sigue cumpliendo un rol importante en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas dado que reconoce, valora y respeta las raíces de un individuo o grupo cultural. Esto no significa ignorar o rechazar las raíces de otros, más bien ayuda a reforzar las ideas de sus propias raíces con el objetivo de entender las matemáticas desde los conocimientos propios de los grupos excluidos. La disciplina puede ser llevada al aula a través de la planeación, la ejecución y la evaluación desde su práctica docente.

Ecuador, al ser un país pluricultural e intercultural reconocido desde la Constitución política del 2008, promueve una enseñanza de calidad y calidez para todos. En el 2017 surgieron las adaptaciones curriculares a partir de los currículos de Educación Intercultural Bilingüe, para las 14

nacionalidades (kichwas, shuar, achuar, entre otros) que corresponden a contenidos obligatorios que articulan objetivos, lineamientos técnicos y pedagógicos. La metodología de enseñanza-aprendizaje y los sistemas de evaluación deben ser trabajados desde una perspectiva cultural e integral que vincula el Sistema Nacional de Educación y el Sistema de Educación Intercultural Bilingüe (SEIB). Los currículos de EIB pretenden satisfacer las necesidades educativas de los educandos en sus contextos socioculturales. Para los actores del sistema educativo es vital conocer a los sujetos y los contextos en los que se desarrollan los procesos educativos (Bonilla et al., 2018; Ministerio de Educación, 2017).

Cada nacionalidad y pueblo indígena del Ecuador vive su propio contexto cultural, posee sus propios conocimientos, su propia ritualidad, sabiduría y espiritualidad. Los contenidos que se proponen desde el currículo EIB deben estar desarrollados desde los propios conocimientos de cada una de las nacionalidades y pueblos indígenas, partir de lo conocido para ir a lo desconocido, del conocimiento local al universal. Bajo este contexto, el currículo se trabaja a través de los armonizadores de saberes que son elementos que no deben faltar dentro del desglose de saberes y contenidos curriculares; así, cada nacionalidad tomará en cuenta los cuatro armonizadores de saberes: (1) vida, tierra y territorio; (2) vida familiar, comunitaria y social; (3) cosmovisión y pensamiento; y (4) ciencia, tecnología y producción.

Se entiende a los armonizadores de saberes como conocimientos esenciales que constituyen el esqueleto para la organización de los contenidos curriculares. Las nacionalidades y pueblos indígenas requieren fortalecer sus saberes y conocimientos, su cultura, su lengua, su historia. Estos elementos deben estar presentes en los procesos de aprendizaje para garantizar la valoración y conservación de lo expuesto. En tal virtud, el currículo EIB y la formación escolar básica y superior en las unidades interculturales o centros comunitarios EIB fomentan la integración del curso de Matemática y Etnomatemática para atender los saberes propios de la comunidad al tiempo que garantizan los principios señalados por el Modelo del Sistema de Educación Intercultural Bilingüe

(MOSEIB), entre ellos, la celebración de tradiciones culturales como *raymic*, calendarios vivenciales, las *mingas* y el cuidado de la naturaleza (siembre, *chakra*, huertos).

3.3 Prácticas culturales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Educadores e investigadores en el campo de la etnomatemática demuestran interés en contextualizar aquellas prácticas y actividades culturales de los grupos, pueblos y nacionalidades. En este sentido, Planas et al. (2012) trabajan en la elección y resolución de problemas a partir de prácticas contextualizadas a las que definen como *problemas ricos*.

Un problema rico es una buena pregunta, puesto que favorece la toma de decisiones e integra el contexto escolar, familiar, cultural y local; se adecua a lo que el estudiante sabe y conoce; conecta diferentes conocimientos matemáticos, incluye puntos concretos del currículo, se relaciona con otras áreas del conocimiento, activa la curiosidad y creatividad. Es accesible a todo estudiante y permite entender las matemáticas desde diferentes ritmos de aprendizaje y, lo fundamental, es el poder incorporar conocimiento matemático fuera de la escuela. Así, por ejemplo, la Figura 2 muestra el diálogo del docente con los estudiantes en la cancha deportiva del CECIB Inti Raymi sobre el tema la *Cruz Andina* (Prácticas preprofesionales de estudiantes de la carrera de EIB -UNAE).

Figura 2. Prácticas en la comunidad de Lagunas, Saraguro



Fuente: Elaboración propia (2018)

Se observa cómo la maestra de aula enseña la importancia de valorizar la cruz andina e interroga a sus estudiantes: ¿cuáles son sus componentes y qué significado tienen para la cosmovisión andina de los kichwas? Los niños comprenden la importancia de los saberes ancestrales y dialogan con la maestra sobre lo que han aprendido con sus familias. Es importante reconocer que el ambiente (cancha deportiva, cocina, chakra, huertos, ríos, etc.) se convierte en un espacio de aprendizaje que busca vincular los conocimientos desde la praxis diaria. Para la EIB, en Ecuador es importante buscar diferentes ambientes y escenarios de aprendizaje en la educación elemental del niño, ya que esto garantiza una educación contextualizada a partir de los saberes que él trae de la casa y su relación cosmocéntrica con el grupo cultural al que pertenece.

La utilización de las matemáticas y el conocimiento matemático desde lo cotidiano en actividades básicas como la compra y venta en un mercado conlleva a un conocimiento que demanda de aprendizaje significativo (entender y comprender las matemáticas no formales en este proceso de transacción de productos). Es más, para enseñar matemáticas, estas deben partir de prácticas aprendidas fuera del ambiente de la escuela, una verdad etnomatemática del comercio. Esto es un componente básico de la disciplina que posibilita una visión crítica de realidades que utilizan instrumentos de naturaleza matemática.

La percepción de los estudiantes sobre la utilización del conocimiento matemático de otras culturas tiene un significado diferente que va desde el uso de algoritmos complejos y fórmulas matemáticas que se aprenden en la educación básica. Sin embargo, el uso de sus propias *mathemas* para realizar una actividad básica busca valorizar ese pensamiento matemático, que también es importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje, debido a que el conocimiento matemático se puede adquirir dentro del salón de clase y fuera del ambiente escolar mediante las prácticas y actividades de los padres o profesionales, grupos, etnias y nacionalidades. Así, por ejemplo, por medio de la actividad de la compra y venta, los estudiantes logran identificar en su vida cotidiana aquellas formas de mercadeo que les permiten encontrar y descubrir ambientes para lidiar con las matemáticas, incluso logran

comprender prácticas propias de una cultura (*trueque*).

En Ecuador, el pueblo indígena los Saraguros se organizó con una economía de subsistencia basaba en el sistema de *trueque* con los habitantes de la provincia de Loja, Zamora-Chinchipec y El Oro. En un principio, este trueque se basaba en el intercambio de alimentos como: queso, granos, sal, panela y arroz (Marín et al., 2015). A pesar de que esta práctica cultural de la serranía ecuatoriana ya no es desarrollada por muchos, aún se mantiene en la memoria de las personas, por lo que se debe integrar como práctica cultural para aprender más sobre la cultura de los kichwas. Así, una comunera de Saraguro señala el *trueque* como la acción de cambiar, es decir, el cambio de cosas u objetos propios de la comunidad como lana de borrego, maíz de colores, semillas, poroto, habas, queso y otros. Claro está que este intercambio de productos no concebía una medición de precisión, sino que establecía porciones o unidades del producto o un equivalente desarrollado por la comunidad. Por tanto, el *trueque* es una práctica cultural que se integra en el curso de matemática y etnomatemática en algunas instituciones educativas EIB con el propósito de valorar la práctica que antaño era la forma de comercio que existía en el Ecuador.

A continuación, se presenta un ejemplo de la actividad de compra y venta en un mercado ecuatoriano para ejemplificar operaciones básicas en este tipo de práctica cultural.

Actividad 1. Compra y venta en el mercado

En los mercados ecuatorianos convergen diferentes clases de medidas como el atado, la tarrina, el balde, la bolsa, el saquillo, el puñado, entre otros. Estas medidas las conocemos como *medidas no convencionales* dado que no establecen una medida precisa, aunque sí emplean convenciones y se aproximan a ciertas cantidades precisas. Esta forma de medición que utilizan los vendedores en un mercado ecuatoriano se llama *matemática informal*, la cual forma parte de la conceptualización de la etnomatemática (las *mathemas* de un contexto sociocultural). Como ejemplo, el atado puede variar en su cantidad de elementos dependiendo de su tamaño. Si el atado tiene elementos grandes por lo general estará compuesto por un aproximado de 5

elementos (zanahorias, cebollines, cebollas, apio, etc.) y si tiene elementos pequeños estará compuesto por un aproximado de 10 elementos (cilantro, perejil, yerba buena, entre otras).

En el ejemplo anterior se puede interrogar:

- ¿Cuántas tarrinas de papa serán necesarias para alimentar a una familia de 4 hijos y dos padres?
- ¿Cuántos atados de zanahoria y cebolla se deben comprar para una familia de 4 hijos y dos padres?
- ¿Cuánto costarán?

Para resolver las preguntas, los estudiantes tendrán que definir para cuántas comidas están comprando, cuánta cantidad obtienen con cada balde de papa y atados pequeños y grandes. Definiendo precios por balde y atado, pueden calcular cuánto les cuesta las compras que necesitan, la comida de la semana, mes, etc. También pueden ponerse en el rol del vendedor. Pueden imaginar tener 20 sacos de papa que compraron a \$10 cada uno y pueden estimar cuántos baldes sacan de cada uno y a cuánto deben vender para recuperar su inversión y ganar algo más. ¡Y ojo con el vecino que también vende papa a buen precio!

Esta actividad permite reflexionar sobre las medidas, aquellas que son no precisas, pues no usan un instrumento de medición, se calculan “al ojo”, y aquellas que son precisas, como *un dólar* o *un kilo*; ambas pueden interactuar, ya que tienen distintas utilidades para distintos propósitos y contextos socioculturalmente situados. La actividad también les permite pensar matemáticamente una necesidad de interés para todos: la comida. De ese modo, se puede entender que las matemáticas son útiles en la vida cotidiana y no requieren cálculos complejos, ni fórmulas para hacer transacciones básicas de compra y venta.

Algunas de las características que diferencian las matemáticas escolares de las matemáticas extraescolares son presentadas por Vilela (2007, p.457) (Tabla 1). Estas características ilustran las diferencias entre una y otra en términos de los objetivos que persiguen, tipos de respuestas, significados institucionales y personales, procesos algorítmicos, ente otros, aspectos que, históricamente, las matemáticas de la escuela habían privilegiado (Knijnik, 2007).

Tabla 1. Matemáticas escolares versus las matemáticas extraescolares

Matemáticas escolares	Matemáticas extraescolares
Situaciones generales	Situaciones particulares
Énfasis en algoritmos, fórmulas, secuencias.	Esfuerzo de resolver problemas.
Disociación de los cálculos de las actividades reales llegando a respuestas sin sentido.	Aproximaciones y redondeamientos sensatos.
Deductiva	Inductiva
Solución correcta y superior	Solución adecuada
Escrito	Oral
Generalización	No generalización
Formal	Informal
Resultado y número	Resultado y decisión
Número puro	Número de cosas reales
Resultados únicos	Resultados aproximados
Cálculos escritos	Cálculos mentales: procesos de agrupamiento y redondeo.
Sin significado para el alumno	Con significado para quien las hace.

Fuente: Oliveras y Blanco - Álvarez (2016)

Por su parte, Vilela (2007, p.72) presenta al menos tres enfoques diferentes mediante los cuales es posible hacer dicha integración: (a) cognitivo, (b) amplificador y (c) político.

El *enfoque cognitivo* se refiere a la importancia y la necesidad de integrar las matemáticas extraescolares en el aula de clase para favorecer la búsqueda de mayor significado del contenido matemático escolar. Dado que en la escuela el significado:

Se pierde porque la resolución de problemas tiene objetivos que difieren de aquellos que nos mueven para resolver problemas fuera del aula, además porque en la clase no estamos preocupados por situaciones particulares, sino por reglas generales que tienden a

vaciar el significado de las situaciones o porque la profesora no le interesa el esfuerzo de un alumno por resolver el problema, sino la aplicación de una fórmula, de un algoritmo, de una operación pre-determinada por el capítulo en que se inserta el problema o por el año escolar en que está el niño (Carraher, Carraher y Schliemann, 2002, p.22).

Así mismo, Oliveras y Blanco-Álvarez (2016) argumentan que los mejores resultados en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se obtienen cuando la experiencia diaria o cotidiana se combina con la experiencia escolar y el estudiante percibe su pertinencia. Así, por ejemplo, en la cultura shuar del Oriente ecuatoriano, las ancianas por lo general fabrican las vasijas para la toma de alimentos, las fabrican de arcilla y las decoran con imágenes geométricas o trazos de curvas de colores rojo y negro (Figura 3).

Figura 3. Vasija elaborada por las ancianas de la cultura shuar del oriente ecuatoriano



Fuente: Elaboración propia (2019)

El interés amplificador tiene que ver con acrecentar el conocimiento matemático escolar gestionado mediante el currículo mediante la incorporación en el aula de los conocimientos de las matemáticas extraescolares y los saberes previos de los estudiantes con el fin de reflexionar con ellos sobre estos. Knijnik (1996 citada en Vilela, 2007, p.70) propone efectuar esa tarea mediante comparaciones de procedimientos matemáticos típicos de la escuela con los de la calle, el mercado,

la plaza, etc. Con ello se busca, por un lado, promover una discusión respecto de los límites y alcances de cada método matemático y, por otra parte, existe un interés político, reivindicar la legitimidad de las matemáticas extraescolares para buscar la equidad social y su reconocimiento en la escuela.

Otro ejemplo de concreción de este modelo es el proyecto del *Aja Shuar*,² desarrollado por los estudiantes del décimo grado de EGB en la comunidad de Yukias, Macas, Oriente ecuatoriano (en el período 2019, en conjunto con la docente del curso de Lenguas y los futuros docentes practicantes de EIB de la Universidad Nacional de Educación-UNAE), tuvo como objetivo valorizar los saberes ancestrales propios de la comunidad. Para ejecutar el proyecto, los estudiantes entrevistaron a *mamas*, ancianas y docentes de la comunidad de Yukias sobre el *aja shuar*, para saber en qué consistía este huerto.

Los estudiantes, al conocer más sobre el *aja shuar*, construyeron un *aja* en el espacio verde del colegio de la comunidad, para ello emplearon medidas no convencionales tales como el paso, la cuarta, el codo, la rodilla, la brazada. De ese modo, valoraron y ejecutaron conocimientos propios de la cultura shuar para la siembra de plátanos, yuca, papa china; posteriormente sembraron fréjol y plantas medicinales. La Figura 4 muestra el desarrollo del proyecto.

Figura 4. Construcción de un *aja shuar* en las instalaciones de un establecimiento educativo de Macas



Fuente: Elaboración propia (2019)

² Espacio donde la mujer intermedia con sus dioses, Nukui y Uwi, quienes le proveen armonía, paz, fuerza, producción y fertilidad; son fuente de alimentación y de vida porque proveen lo necesario para la subsistencia (Carvajal y Shacay, 2004).

Cuando los saberes escolares de las matemáticas desconocen o deslegitiman otra forma de conocimientos y de saberes se genera un modo de exclusión social de los conocimientos de los grupos, nacionalidades y etnias (en este caso, de la nacionalidad shuar). Por lo tanto, la necesidad de integrar las matemáticas extraescolares en el trabajo en el aula y escuela queda argumentada y deben ser reconocidas las tensiones y relaciones que provoca esta integración. El sistema educativo no tiende a desarrollar los conocimientos matemáticos de los grupos culturales por su sistema de evaluación de conocimientos, es una matemática occidental que no considera el saber de los grupos, etnias y nacionalidades. En este sentido, Vilela (2010) argumenta que:

Las prácticas matemáticas usadas en la calle, en las escuelas, en la academia, o por grupos profesionales etc., son un conjunto variado de juegos de lenguaje o diferentes usos de conceptos matemáticos en prácticas diferentes y, por lo tanto, no constituyen un único edificio de conocimiento llamado matemáticas, sino esquemas teóricos específicos que forman condiciones para el sentido, significado e inteligibilidad en diferentes situaciones, tiempos y lugares en la vida (p.350).

A continuación, la Tabla 2 nos amplía esta información.

Tabla 2. Análisis de las unidades de información: componentes, categorías emergentes y su descripción

Categorías emergentes	Descripción	Componente
Matemáticas de la escuela	Contenidos matemáticos enseñados en el aula de clase que son caracterizados por un nominalismo formal de los conceptos matemáticos.	Concepciones de los maestros sobre las matemáticas.
Matemáticas extraescolar	Reconocimiento de prácticas matemáticas fuera del aula de clase haciendo uso de un nominalismo popular para referirse a conceptos o prácticas matemáticas que se realizan en gremios tales como: pescadores, tejedoras, comerciantes, artesanos, agricultores, etc.	
Aprendizaje situado	Aprendizaje que se realiza apoyándose en actividades contextualizadas que incorporan prácticas cotidianas y que permiten que los estudiantes adquieran mayor significado de los conceptos.	Matemáticas extraescolares y su relación con el currículo.
Integración curricular	Posibilidad de integrar elementos de la cultura y la comunidad en el currículo escolar.	
Evaluación	Aplicación evaluaciones estandarizadas en el país.	
Interés en cambios curriculares	Interés positivo o negativo de cada uno de los agentes educativos entre ellos: maestros, directivos, docentes y administradores educativos.	
Relaciones intergeneracionales	Relaciones entre jóvenes y adultos mayores al cumplir una tarea matemática.	

Fuente: Oliveras y Blanco-Álvarez (2016)

Por su parte, la educación matemática contemporánea es un área de investigación cuya preocupación radica en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en la búsqueda de metodologías, estrategias, técnicas y alternativas para su enseñanza. Es decir, la educación matemática presenta posibilidades para mejorar e innovar su enseñanza usando conceptos como transposición didáctica, modelaje matemático, tecnologías de la información y comunicación, etnomatemática, juegos matemáticos, historia de la matemática, didáctica de la matemática, resolución de problemas, entre otros (Lopes, Leao y Dutra, 2018).

3.4 Dimensiones de la etnomatemática

La etnomatemática no puede ser confundida como un método de enseñanza, ya que no sigue pasos, dado que ella asume un papel de un procedimiento que el docente tomará para enseñar en el salón de clase. Incluso el docente que integre la etnomatemática como alternativa en el proceso de enseñanza-aprendizaje debe valorizar, reconocer las formas y maneras en la que vive y convive un grupo, nacionalidad o etnia.

La pregunta que surge es: ¿es la etnomatemática un recurso didáctico? Para Rosa y Orey (2016) puede entenderse más bien como la integración de un modelaje matemático con el que se alcanza objetivos educacionales en un grupo de estudio. En este sentido, muchas veces se confunde la idea de la etnomatemática, el modelaje matemático y la matemática académica. Para establecer las diferencias, se debe apreciar que la etnomatemática trabaja seis dimensiones: cognitiva, conceptual, educacional, epistemológica, histórica y política.

La dimensión conceptual considera a la etnomatemática como una sistematización de investigaciones en historia y filosofía de la matemática con implicaciones pedagógicas visibles. Entiende que los cambios en la vida de cada miembro y de cada cultura responden a preguntas de creación, procedimientos, prácticas, métodos y teorías basados en sus representaciones de la realidad. Estas acciones constituyen una base fundamental para el desarrollo del conocimiento y procesos de decisión y acciones. El conocimiento matemático

emerge como respuesta inmediata de la necesidad de supervivencia y trascendencia.

La *dimensión histórica* explica los tipos de matemáticas que imperan en el tiempo. Lo fundamental es estudiar el vínculo entre la historia de la matemática y la realidad de los aprendices. Esta dimensión lleva a los estudiantes a examinar la naturaleza de las matemáticas en términos de entendimiento y de cómo el conocimiento matemático es localizado en experiencias individuales y colectivas. El conocimiento es construido mediante la interpretación de las formas en que la humanidad ha analizado y explicado el fenómeno matemático a través de la historia.

La *dimensión cognitiva* consiste en una idea matemática practicada por medio del comparar, clasificar, medir, cuantificar, explicar, inferir y generalizar y concierne a la adquisición, acumulación y diseminación del conocimiento matemático a través de generaciones. No es posible evaluar el desarrollo de habilidades cognitivas del contexto social, cultural, económico, político y ambiental. Es decir, se puede hablar de las prácticas o actividades propias (procesos de la etnomatemática) de un grupo o comunidad (Bishop, 1999; D' Ambrosio, 2013, p.41, 30):

- *Contar*: desarrolla números, nombres para los números, pautas, bases, sistemas numéricos, cuantificadores y magnitud discreta.
- *Medir*: desarrolla orden, tamaño, unidades, sistemas de medida, precisión, magnitud continua.
- *Localizar*: desarrolla dimensiones, coordenadas, ejes, caminos, redes, simetría, topología, distancia y dirección, lugares geométricos.
- *Jugar*: desarrolla reglas, procedimientos, planes, modelo, juego, satisfacción, competición, cooperación.
- *Diseñar*: desarrolla forma, regularidad, pautas, construcciones, dibujo, representación y geometría.
- *Explicar*: desarrolla clasificación, convenciones, argumentos, lógica, prueba, relato y conectivas.

La *dimensión epistemológica* se configura para mostrar que la cultura es la historia del grupo, que es un elemento que representa al individuo y su interacción con otros individuos. Trata con sistemas de conocimientos, los cuales parten de un conjunto de observaciones empíricas desarrolladas para entender, comprender y explicar la

realidad. ¿Cómo desarrollar un conjunto de observaciones y prácticas para experimentar y definir métodos?, ¿cómo movernos de la experimentación y métodos a la reflexión y abstracción? y ¿cómo proceder a través de la invención y la teoría?

La *dimensión política* resalta las grandes transformaciones en la conjunción de las culturas africanas, indígenas y europeas. En cualquier comunidad cada individuo trae consigo sus raíces culturales y al llegar a la escuela hay un proceso de aproximación, transformación con una dinámica compleja que puede ser positiva o negativa. Reconoce y respeta la historia, tradición y pensamiento matemático desarrollado por los miembros de diferentes grupos culturales.

La *dimensión educacional* es una propuesta de la etnomatemática para transformar la matemática a la que se considera como algo vivo. No rechaza el conocimiento y desarrollo académico adquirido, pero incorpora valores humanos como respeto, tolerancia, aceptación, cuidado, dignidad, integridad y paz en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en orden de humanizar y brindar una vida de calidad. La etnomatemática promueve el fortalecimiento del conocimiento académico cuando los estudiantes entienden ideas, procedimientos y prácticas matemáticas en su vida diaria.

4. Conclusiones

Pensar la etnomatemática como la metodología del programa de investigación es amplia, pues engloba la generación, producción, organización, transmisión y difusión del conocimiento de los miembros de diversos grupos culturales que fueron acumulados en el transcurrir de la historia y que están en permanente evolución. En este sentido, el programa de esta disciplina puede ser considerado como una teoría del conocimiento que incorpora las concepciones de ciencia y del conocimiento general y que propone el rescate y la apropiación de la memoria matemática cultural de los individuos que componen tales grupos, como, por ejemplo, las codificaciones y simbologías. De esa forma, cada individuo es un elemento que compone la memoria matemática cultural colectiva del grupo. Las matemáticas deben ser comprendidas como una construcción social del conocimiento debido

al hecho de que como individuos vivimos en sociedad, por lo que el proceso de construcción de saberes matemáticos es enriquecido por la influencia mutua con otros saberes vivenciales a partir de comprender la historia de los sujetos para explicar, comprender e intervenir la realidad en el medio natural y cultural.

La etnomatemática en pleno siglo XXI propone una educación que va más allá de revalorizar el conocimiento matemático de las culturas, grupos y etnias, busca educar por medio de otras matemáticas propias de la cultura. En este sentido, busca forjar en los estudiantes, futuros ciudadanos, valores no necesariamente de una matemática escolar, sino aquellos para la humanidad como respeto de la sociedad, amor por la cultura y mantener una identidad. No se muestra como un método de enseñanza o contextualización, sino como una propuesta de trabajo que se preocupa de las relaciones humanas y sociales para atender la diversidad desde los diferentes grupos, etnias, nacionalidades. Tampoco es propia de la Educación Intercultural Bilingüe (EIB), esta debe trabajarse desde los diferentes espacios escolares y extraescolares de los educandos. En definitiva, no es solo un campo de investigación basado en la descripción e interpretación de saberes matemáticos presentes en objetos culturales o prácticas sociales, sino que también puede ser un campo de investigación comprometido con la transformación de las realidades educativas y sociales a partir de la legitimación y democratización de los saberes propios de las comunidades (Fuentes-Leal, 2014).

La etnomatemática, en conclusión, es un campo que puede promover las transformaciones de las prácticas pedagógicas de los docentes contemporáneos que buscan integrar técnicas, formas y maneras de enseñar matemáticas desde la realidad de los educandos, por medio de la dotación de herramientas que construyan sujetos analíticos y críticos de su realidad. Por lo tanto, es necesario seguir aportando con investigaciones en el campo epistemológico, pedagógico y cultural para afianzarla como parte de la educación matemática del siglo XXI, una interesante alternativa para enseñar una ciencia abstracta como las matemáticas.

Referencias bibliográficas

- Ascher, M. (1986). Extractos de cartas recibidas. *Boletines del Grupo de Estudio Internacional de Etnomatemática* 1 (2).
<http://web.nmsu.edu/~pscott/isgems12.htm>.
- Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural*. Paidós.
- Bonilla, M., Rosa, M., Auccahuallpa, R., Reyes, M. y Martínez, O. (2018). Un estudio de la educación matemática, intercultural y bilingüe: una perspectiva etnomatemática. *Journal of Mathematics and Culture*, 12 (1), 1-27.
- Carraher, T., Carraher, D. y Schliemann, A. (2002). *En la vida diez, en la escuela cero*. Siglo veintiuno.
- Carvajal, J. y Shacay, C. (2004). *Aja Shuar. Sabiduría Amazónica. De la práctica y a la reflexión y aprendizaje de la bio-cultura*. Fundación Natura.
- D' Ambrosio, U. (2004). Etnomatemática e educação. En G. Knijnik, F. Wanderer y C. J. Oliveira. (Eds.), *Etnomatemática: currículo e formação de professores* (pp. 39-52). EDUNISC.
- D' Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemática. Eslabón entre las tradiciones y la modernidad*. Limusa.
- D' Ambrosio, U. (2013). *Etnomatemática. Entre las tradiciones y la modernidad*. Diaz do Santos.
- Fuentes-Leal, C. (2014). Algunos enfoques de investigación en etnomatemática. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(1), 155-170.
- Gerdes, P. (1989). The use of the ethnomathematics in the classroom, proceedings of politics of mathematics education conference. *NEE Mathematics Commission, Western Cape* (pp. 26-36). University of Westen Cape.
- Knijnik, G. (2007). Diversidad cultural, matemáticas y exclusión: oralidad y escrita en la educación matemática campesina del sur del Brasil. En J. Giménez, J. Díez-Palomar y M. Civil (Coord.), *Educación matemática y exclusión* (pp. 66-83). Graó.
- Knijnik, G. (2012). Differentially positioned language games: ethnomathematics from a philosophical perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 80(1-2), 87-100.
- Lopes, T., Leao, M. y Dutra, M. (2018). Etnomatemática como metodología para ensinar e aprender conceitos matemáticos na educação do campo. *Revista Educaçao, cultura e Sociedade*, 8(1), 236-249.
- Marín, I., Hinojosa, M., López, A. y Carpio, L. (2015). *El San Pedro y la mujer Saraguro. La medicina tradicional aplicada por la yachakkuna*. En VII Congreso Virtual sobre Historia de las mujeres, del 15 al 31 de octubre de 2015.
- Oliveras, M. y Blanco-Álvarez, H. (2016). Integración de la etnomatemática en el aula de matemáticas: posibilidades y limitaciones. *Boleva*, 30(55), 455-480.

- Planas, N., Morera, L., Chico, J. y Badillo, E. (2012). Problemas ricos en argumentación para secundaria. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las matemáticas*, 70, 9-20.
- Rosa, M., y Orey, D. (2016). Tendências atuais da etnomatemática como um programa: rumo à ação pedagógica. *Zetetiké: Revista de Educação Matemática*, 13(23), 121-136.
- Souza-Lima, W. (2013). *Etnomatemática: Perspectiva o metodología de enseñanza. Actas del VII CIBEM*. Montevideo, Uruguay, 7540-7547.
- Vilela, D. (2007). *Matemática nos usos e jogos de linguagem: Ampliando concepções na Educação Matemática* [Tesis de Doctorado]. Facultad de Educación, Unicamp, Campinas.
- Vithail, R. y Skosmose, O. (1997). The end of innocence: a critique of ethnomathematics. *Educational Studies of Mathematics*, 34, 131-157.

CAPÍTULO 5

ETNOMATEMÁTICA COMO UN PROGRAMA PARA LA ACCIÓN PEDAGÓGICA SUBVERSIVA Y RESPONSABLE EN LOS CURSOS DE FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Milton Rosa

milrosa@hotmail.com

Universidad Federal de Ouro Preto

Ouro Preto, Brasil

Daniel Clark Orey

oreydc@gmail.com

Universidad Federal de Ouro Preto

Ouro Preto, Brasil

1. Introducción

La etnomatemática es un programa que surgió en oposición al discurso eurocéntrico dominante en educación matemática caracterizado por privilegiar los currículos escolares diseñados por los países colonizadores y que fueron impuestos a las comunidades locales durante el proceso de colonización. Al valorar al discurso matemático como eurocéntrico y opresivo, la etnomatemática desafía la concepción de que los miembros de grupos culturales distintos solo desarrollan y desarrollarán algoritmos, procedimientos y técnicas matemáticas simplistas para resolver los problemas que enfrentan en su vida diaria. La emergencia de la etnomatemática puede ser interpretada como una reacción a ese imperialismo cultural que comenzó a extenderse por el mundo con la expansión de la navegación a partir del siglo XV (D' Ambrosio, 1985, p.44).

Este programa también puede ser relacionado con el concepto de subversión responsable desarrollado por Hutchinson (1990). De acuerdo con esta concepción, el programa de etnomatemática establece que para alcanzar el bienestar de los miembros de grupos culturales distintos existe la necesidad de flexibilizar las normas y reglamentos de los cursos de formación de profesores de matemáticas y cambiar la formación que se viene impartiendo. En el dominio de la educación matemática, de acuerdo con D' Ambrosio y Lopes (2015a, p.10), la subversión se refiere a las prácticas de los profesores que, de manera subversiva, pero con discernimiento y responsabilidad se oponen a la burocracia educativa, a las políticas públicas y a las prescripciones educacionales sin sentido pedagógico.

Considerando lo dicho, uno de los principales objetivos de los cursos de formación de profesores de matemáticas debe estar orientado a ayudar a estos profesionales a hacerse responsables y subversivos para que puedan alcanzar las demandas de la población escolar. La formación docente debe conocer la naturaleza colaborativa de la etnomatemática, perspectiva que promueve la reflexión de estos profesionales sobre su práctica docente, así como deliberaciones grupales sobre la necesidad de implementar estrategias de enseñanza alternativas para el proceso de enseñanza y aprendizaje en matemáticas. En este sentido, el análisis

diagnóstico y reflexivo de la documentación del proceso proporciona a los profesores la confianza y la autoeficacia necesarias para defender las múltiples dimensiones de su práctica pedagógica por medio de acciones subversivas y responsables (Lopes y D' Ambrosio, 2016, p.1090).

En la educación matemática ese enfoque es considerado como la antítesis de la mayoría de los modelos de cursos de formación de profesores de matemáticas, pues pretende formar profesionales dirigidos hacia el trabajo pedagógico con poblaciones escolares marginadas, por ejemplo, los alumnos con deficiencias, con bajo rendimiento escolar o los provenientes de clase trabajadoras marginalizadas. No obstante, la educación todavía depende del uso de estrategias de enseñanza y aprendizaje que son elaboradas por un grupo de profesionales oriundos, prioritariamente de clase media blanca y a quienes se les dificulta comprender las experiencias y vivencias de alumnos procedentes de otros grupos culturales (Gutiérrez, 2012). Al alejarse de estas prácticas, los futuros profesores podrán ser considerados como profesionales subversivos y responsables en cuanto buscan alternativas pedagógicas creativas para alcanzar mejores resultados para el bien común de las comunidades a las que pertenecen.

Los resultados de los estudios de Rosa y Orey (2013) recomiendan una propuesta etnomatemática para la formación inicial y continua de los profesores de matemática en la medida en que está en sintonía con las tendencias actuales que llaman a innovar la educación matemática. En efecto, gracias a este modelo, los profesores pueden desarrollar habilidades específicas para investigar las ideas y las prácticas matemáticas locales que ocurren fuera del contexto escolar y para llevarlas a su práctica educativa en las comunidades por medio de actividades contextualizadas. Para Rosa y Orey (2017), esta acción es una forma de resistencia y, en general, un desafío a la autoridad establecida que se opone al desarrollo del bienestar común de alumnos provenientes de grupos minoritarios y marginados del sistema de enseñanza por el uso de políticas estatales y pedagógicas discriminatorias.

Por eso, es importante que en los cursos de formación de profesores estos profesionales comprendan que uno de los principales objetivos

de la subversión responsable es adquirir una conciencia crítica y reflexiva sobre *cuándo, cómo y por qué actuar* contra los procedimientos y directrices injustos o que no asistan a la población escolar. De acuerdo con D' Ambrosio y Lopes (2015a, p.12) ser subversivamente responsable exige que los profesores se acepten como seres inacabados e incompletos, que utilicen la curiosidad como un fundamento para la producción de saberes.

Para Rosa y Orey (2016), la etnomatemática incentiva y motiva el estudio de ideas, procedimientos y prácticas matemáticas locales provenientes de contextos culturales diversos que están de acuerdo con los conocimientos émicos³ de sus miembros. Con este proceder, se cultiva y proponen ambientes de aprendizaje democráticos, que estén vinculados con el contexto sociocultural de esos futuros profesionales. Rosa, Orey y Gavarrete (2017), complementando lo dicho, explican que el modelo de formación docente basado en etnomatemática aporta elementos de discusión acerca de la pertinencia cultural y la formación docente en relación con el conocimiento cultural y el conocimiento matemático escolar.

Este capítulo busca brindar una visión de los principales rasgos de la etnomatemática que pueden contribuir a la formación de profesores de tal modo que ellos puedan mejorar sus prácticas pedagógicas cuando trabajen con grupos diferenciados.

2. El programa etnomatemática como base teórica para la acción pedagógica de los cursos de formación de profesores de matemáticas

El Programa Etnomatemática rompió con las reglas y las normas burocráticas de la matemática académica al reconocer y valorar los diversos modos y las maneras distintas en las que el conocimiento matemático es producido en otras culturas. Por consiguiente, por haber iniciado una perturbación que puede haber causado una revisión del sistema de conocimiento

³ Los conocimientos émicos son las narraciones, las descripciones y los análisis de las ideas, procedimientos y prácticas matemáticas que están expresados en términos de los esquemas y categorías conceptuales que son considerados apropiados y significativos por los miembros del grupo cultural en estudio (Rosa y Orey, 2012, p.36).

matemático académico, ha dado lugar a la aparición y al crecimiento potencial de nuevas oportunidades para la discusión sobre la naturaleza del currículo matemático en los cursos de formación de profesores de matemáticas. La subversión desencadenada contribuye a enfrentar tabúes o ideas que sugieren que las matemáticas son un campo de estudio universal sin tradiciones ni raíces culturales (Rosa y Orey, 2015a).

Los retos que los futuros profesores de matemáticas enfrentan en los cursos de formación están relacionados con el desarrollo de procedimientos metodológicos que puedan ayudarlos a comprender las ideas, los procedimientos y las prácticas matemáticas desarrolladas localmente por los miembros de grupos culturales distintos sin que su cultura pueda interferir o influenciar el desarrollo de los conocimientos de los alumnos procedentes de otras culturas. Orey y Rosa (2014) afirman que los miembros de grupos culturales distintos desarrollan una propia interpretación de su cultura (enfoque étnico local) que está en oposición a la interpretación de los observadores externos (enfoque ético global).

Para Presmeg (1998), un paso importante para recurrir a las prácticas culturales marginalizadas es la afirmación de la diversidad en clase de matemáticas y esto se consigue cuando los futuros profesores se hacen conscientes de estas cuestiones gracias a los cursos específicos de formación. Según D' Ambrosio y Lopes (2015b, p.16), la formación docente con este modelo posibilita formar profesores activos, críticos, reflexivos y responsables, dispuestos a colaborar con su grupo de pares con el objetivo de buscar soluciones (de forma colectiva y comparativamente) para los problemas educacionales que aparecen en sus prácticas pedagógicas cotidianas.

De acuerdo con Gutiérrez (2015), los cursos de formación de profesores de matemáticas deben proporcionar oportunidades para que estos profesionales puedan: (a) añadir y ampliar complejidad a sus entendimientos sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas a los alumnos provenientes de grupos minoritarios y marginados; (b) reconocer y desarrollar múltiples interpretaciones sobre las situaciones

que, normalmente, son inobservables en relación con las matemáticas, los alumnos, las cuestiones de justicia social y la profesión docente; (c) desarrollar una posición de apoyo para ayudar a los alumnos provenientes de grupos minoritarios y marginados en el proceso de enseñanza y aprendizaje; (d) volver adeptos de las luchas que combatan los *discursos substractivos*⁴ y las *asimilaciones substractivas*⁵, que definen a esos alumnos como incompetentes.

En los cursos de formación de profesores de matemáticas se debe deconstruir la noción de que las ideas, los procedimientos y las prácticas matemáticas de origen europeo son *auténticamente modernos*, pues están basados en presupuestos y valores filosóficos que son traspasados por los miembros de grupos culturales distintos, no por ello válidos para otros grupos. Hay la convicción de que las prácticas matemáticas son las mismas en todas las culturas y que sus objetivos y técnicas son aplicables y utilizados de la misma manera por los miembros de todos los grupos culturales. En tal sentido, se deben combatir las creencias de que los procedimientos matemáticos son únicos y universales.

Un objetivo importante para combatir los métodos tradicionales del proceso de enseñanza y aprendizaje utilizados en esos cursos es desafiar los modelos teóricos existentes en sus presupuestos de universalidad de las matemáticas, así como en sus reivindicaciones de adecuación descriptiva, predictiva y explicativa de ese conocimiento. Otro objetivo es comprender y explicar las variaciones históricas de las ideas, procedimientos y prácticas matemáticas de acuerdo con el tiempo, la cultura, el origen, la raza, la etnia, el género, la orientación sexual y otras características socioculturales. Gutiérrez (2015) recomienda que en los cursos de formación de profesores de matemáticas la opresión sea erradicada para que la justicia social sea promovida en el proceso de enseñanza aprendizaje y en el desarrollo curricular y se debe luchar para que la influencia de las creencias e ideologías de los profesores en

⁴ En los discursos substractivos, la lengua materna de los miembros de grupos culturales distintos debe ser descartada y sustituida por la lengua de las culturas dominantes y por sus discursos. Por otro lado, en los discursos pluralistas la lengua materna es construida y desarrollada junto con la de las culturas dominantes (Duran y Palmer, 2014, p.370).

⁵ La asimilación substractiva incluye las estrategias de dominación que sustituyen los comportamientos, las creencias y las prácticas culturales de los miembros de una determinada cultura (considerados inferiores por aquellos de la cultura dominante, que se cree superior). Por otro lado, la aculturación aditiva incluye las estrategias democráticas que honran los comportamientos, las creencias y las prácticas culturales de los miembros de una determinada cultura al mismo tiempo que propician su acceso a la cultura dominante (Ladson-Billings, 2006, p.32).

ese proceso sea minimizada.

Bajo tal ideario, las políticas escolares, por ejemplo, la *clasificación de alumnos por rendimiento académico (tracking⁶)* pueden ser analizadas como formas de prejuicio. En la práctica docente en clase es importante que los futuros profesores reconozcan que las reformas educativas afectan de diferentes formas a los alumnos que, históricamente, fueron marginados (Gutiérrez, 2015). Esos objetivos también están de acuerdo con los presupuestos del Programa Etnomatemática, principalmente con relación a su subversión responsable en la preparación de los futuros profesores para la práctica docente.

La acción pedagógica de la etnomatemática en los cursos de formación de profesores de matemáticas posee tres enfoques que pueden ayudar a que el futuro docente comprenda las ideas, procedimientos y prácticas matemáticas desarrollados por los miembros de grupos culturales distintos:

1. **Global (ético, *outsider*, de fuera):** es la visión de los observadores externos sobre las creencias, las costumbres y los conocimientos científicos y matemáticos creados por los miembros de grupos culturales distintos. El proceso de globalización reforzó el desarrollo de la perspectiva utilitaria de las matemáticas, el uso de un currículo matemático prevalente en las culturas dominantes, y permitió globalizar las ideologías matemáticas universales. En particular, las matemáticas escolares son consideradas como una fuerza cultural homogeneizadora, un filtro para el mantenimiento del *status quo*, una perpetuadora de la ideología de la certeza y un instrumento de poder. Con este enfoque, los investigadores y educadores describen las diferencias y similitudes entre culturas distintas, comparándolas. Estos individuos son denominados *culturalmente universales* (Sue y Sue, 2003, p.320).
2. **Local (émico, *insider*, de dentro):** es la visión de los miembros de un determinado grupo cultural sobre sus propias prácticas culturales, costumbres, religión, sexualidad, creencias y

⁶ *Tracking* significa que la población escolar está organizada en clases de acuerdo con el rendimiento general de los alumnos, por ejemplo, por encima de la media (fuerte), medio (normal) o por debajo de la media (flojo). Así, los alumnos son clasificados de acuerdo con su rendimiento académico para organizar las clases (Hallinan, 1994, p.80).

conocimientos científicos y matemáticos. El conocimiento local es importante porque fue probado y convalidado en el propio contexto cultural. De este modo, el conocimiento local propicia una estructura social a partir de la cual miembros de grupos culturales distintos pueden entender e interpretar el mundo que los rodea de acuerdo con sus propias inferencias socioculturales. Actualmente se reconoce la importancia de las perspectivas locales para el desarrollo de los conocimientos científicos y matemáticos. Desde este enfoque, los miembros de estos grupos describen la cultura con sus propios términos. Estos individuos son denominados *culturalmente específicos* (Sue y Sue, 2003, p.321).

3. **Glocalización (émico-ético, dialógico):** representa una interacción continua entre la globalización y la localización, pues ambos enfoques son elementos de un mismo fenómeno (Kloos, 2000). Abarca la mezcla, la combinación y la adaptación de los dos procesos, de entre los cuales un componente debe tratar la cultura local compuesta por sistemas de valores y prácticas (Khondker, 2004). En una sociedad glocalizada, los miembros de grupos culturales distintos deben estar capacitados para actuar globalmente en su ambiente local y viceversa (Rosa y Orey, 2017b).

Bajo estos presupuestos, la interacción de los enfoques globales y locales puede ayudar al desarrollo de los miembros de grupos culturales distintos para que estén equipados con un conocimiento globalizado que pueda crear una especie de *globalización localizada*, pues están enraizados en las tradiciones de sus propios contextos culturales (Cheng, 2005, p.32). Y, de acuerdo con ese contexto, los futuros profesores que procuran vincular los enfoques universales (globales) o específicos (émicos) de la comunidad escolar enfrentan el clásico dilema émico-ético (glocal), que promueve el desarrollo de objetivos científicos en tensión, en conflicto con el currículo matemático propuesto en los cursos de formación de profesores de matemáticas.

3. Aspectos de subversión responsable en cursos de formación de profesores de matemáticas enraizados en la perspectiva etnomatemática

Los enfoques locales y globales son frecuentemente percibidos como paradigmas inconmensurables. Sin embargo, mientras puedan ser pensados como una dicotomía en conflicto también pueden ser considerados como puntos de vista complementarios. Por consiguiente, en vez de presentar un dilema, el uso de ambos enfoques profundiza y puede aclarar la comprensión de cuestiones importantes en el currículo matemático de los cursos de formación de profesores de matemáticas (Rosa y Orey, 2017). Dado que estos enfoques son complementarios, es posible delinear formas de sinergia entre los conocimientos matemáticos locales y globales.

En este sentido es importante utilizar una combinación de dichos enfoques en la perspectiva dialógica émica-ética (local-global). Ahora bien, esta perspectiva exige, en primer lugar, que los profesores comprendan el conocimiento local desarrollado por los alumnos provenientes de grupos culturales distintos. Este enfoque permite que los profesores se familiaricen con las diferencias culturales relevantes en contextos culturales distintos (Rosa y Orey, 2015a).

De modo semejante, los debates sobre la importancia de la diversidad cultural en el currículo matemático en los cursos de formación de profesores de matemáticas también renovaron el interés por el debate local-global. Esta discusión demuestra la necesidad de construir generalizaciones científicas y, al mismo tiempo, la de utilizar la diversidad sociocultural en el contexto escolar. Sin embargo, la comprensión de las interpretaciones matemáticas desarrolladas por los miembros de cada cultura puede desafiar los objetivos tradicionales de las matemáticas cuya finalidad es elaborar teorías que describan el desarrollo de las ideas, procedimientos y prácticas matemáticas en el ambiente académico.

En ese contexto, los observadores locales (internos) procuran entender las ideas, los procedimientos y las prácticas matemáticas desarrolladas por los miembros de grupos culturales distintos, de acuerdo con la perspectiva de la dinámica interna y con las relaciones

y comportamientos de esos miembros, que son influenciados por los contextos social, cultural, político, económico y ambiental. Por su lado, generalmente, los observadores globales (externos) asumen una postura transcultural y comparativa que busca comprender o explicar las diferentes culturas a partir de una visión externa del mundo. La visión del mundo local aclara las distinciones culturales intrínsecas a los miembros de cada grupo cultural mientras que la visión del mundo global busca la objetividad de los observadores externos sobre estas culturas (Anderson, 1997).

De acuerdo con Rosa y Orey (2017), es importante que esos enfoques sean discutidos en los cursos de formación de profesores para que los futuros profesionales tomen consciencia sobre la importancia de complementar los conocimientos locales con los globales. Por consiguiente, el enfoque local procura examinar los principios de clasificación y conceptualización desarrollados en el interior de cada grupo cultural. Si las ideas y los procedimientos matemáticos practicados por los miembros de una determinada cultura son valorados, entonces, el análisis de esas prácticas locales es culturalmente intrínseco al contexto de las creencias, pensamientos y actitudes desarrollados por estos miembros. De este modo, los conocimientos y las interpretaciones locales son esenciales para el desarrollo de un análisis ético, que está relacionado con los *saberes y haceres* matemáticos propios de esta cultura.

Desde ese punto de vista, en el interior de los grupos culturales se produce y se acumulan conocimientos que se comparten entre los miembros del grupo, lo que les posibilita que comprendan los contextos culturales en los que se desenvuelven (D' Ambrosio, 2006, p.80). Ese enfoque también tiene como objetivo desarrollar la autodeterminación y la reflexión humana. No se trata solo de una necesidad intrínseca. El análisis global (ético) insta también al desarrollo de un enfoque transcultural. Así, los profesores orientados desde esta perspectiva examinan las ideas, los procedimientos y las prácticas matemáticas de acuerdo con criterios derivados externamente. Actuar de este modo les permite efectuar comparaciones entre varias culturas para lo cual deben usar patrones de comparación equivalentes (Helfrich,1999).

Por lo tanto, en los cursos de formación de profesores de matemáticas es importante realizar investigaciones en etnomatemática. La cultura, el género, la sociedad, la lingüística, la política, la religión y las *afiliaciones étnicas*⁷ deben ser investigados e integrados por medio de una visión holística del ambiente sociocultural en el cual los futuros profesores están insertos. De esta manera, las ideas, procedimientos y las prácticas matemáticas son utilizados en el transcurrir del proceso de enseñanza y aprendizaje en matemáticas y no solo como uno de sus resultados finales. Las investigaciones en etnomatemática con respecto a los cursos de formación de profesores de matemáticas han demostrado la influencia de la cultura en la evolución del conocimiento matemático, por lo que el estudio de los relatos históricos ayudaría en el análisis de las concepciones, los procedimientos y las prácticas matemáticas desarrolladas localmente.

De acuerdo con Orey (2000), este enfoque pretende deconstruir el discurso matemático dominante al ofrecer visiones innovadoras sobre la naturaleza de este conocimiento. En este sentido, existe una subversión responsable cuando se comprende que las normas y las reglas utilizadas en las matemáticas académicas y en los cursos de formación de profesores de matemáticas son inconsistentes con el conocimiento matemático desarrollado por la realidad local de los futuros profesores. Es necesario enfatizar que la acción pedagógica desarrollada en muchos cursos de formación de profesores de matemáticas ignora esa conexión vital entre el conocimiento académico y las prácticas desarrolladas por los miembros de la comunidad escolar.

Para reducir el vacío entre el conocimiento académico y el práctico, es necesario que en la formación docente se inste a que los profesores consulten las posibles conexiones entre los conocimientos matemáticos desarrollados en contextos locales con los producidos en el ambiente académico. De ese modo, los profesores son desafiados a introducir la diversidad cultural de los alumnos en el currículo, conscientes de que los alumnos utilizan procedimientos y prácticas matemáticas diversas

⁷ La afiliación étnica es un término usado para describir cómo los individuos están vinculados a un gran grupo sociocultural, pues poseen características raciales o rasgos culturales semejantes, de modo que esta afiliación está relacionada con las características de los miembros de un determinado grupo cultural que posee trazos culturales comunes, por ejemplo: la religión, la lengua, el comportamiento y las costumbres. Entendida así, la afiliación étnica resulta del clasificar a la humanidad en grupos específicos de acuerdo con sus características raciales o culturales.

en su vida cotidiana (François, 2010). Entonces, es importante resaltar que el conocimiento matemático desarrollado localmente debe ser valorado y apreciado por los miembros de la comunidad académica (Rosa y Orey, 2015b).

Siendo así, se recomienda que los cursos de formación de profesores de matemáticas incorporen en la preparación clases elementos multiculturales que ayuden a desarrollar habilidades especiales de instrucción a los futuros docentes para que puedan acomodarse a los diferentes estilos y estrategias de aprendizaje. Los futuros docentes deben reconocer que la cultura puede influir en el comportamiento de los alumnos en relación con su participación en las discusiones propuestas en clase, por ejemplo: preguntar a los profesores, aceptar la autoridad, memorizar datos y algoritmos y buscar formas innovadoras de comprensión de los contenidos matemáticos.

La lectura incorrecta de las referencias culturales presentadas en el aula puede inducir a los profesores a entender equivocadamente el proceso de enseñanza y aprendizaje de los alumnos o incluso a pensar que una respuesta natural implica que desconocen sus características culturales (Shirley, 2002). Los cursos de formación de profesores de matemáticas utilizan la etnomatemática en su acción pedagógica, pues reconocen la singularidad del grupo al que se enseña e incorporan las perspectivas matemáticas de la comunidad escolar y de los miembros de los grupos culturales para poner de relieve sistemas de conocimientos distintos. Por consiguiente, trabajar con estas perspectivas de manera dinámica, valorando otros saberes, permite que los alumnos accedan a diversas informaciones socioculturales con respecto a los contenidos matemáticos que están aprendiendo (Rosa y Orey, 2016).

Es importante que las investigaciones en etnomatemática relacionadas con los cursos de formación de profesores describan las ideas y los procedimientos que están implícitos en las prácticas matemáticas desarrolladas localmente por los miembros de la comunidad escolar. Al respecto, Lloyd (2011) juzga que las investigaciones sobre estas prácticas pueden ser consideradas como una forma de resistencia a la imposición del conocimiento matemático académico en la medida en que pueden dar lugar a que los maestros encuentren soluciones creativas e innovadoras a los desafíos que se les presentan

cuando enseñan matemáticas.

Un buen ejemplo de lo dicho es un estudio realizado en Brasil que investigó la especificidad de las ideas, los procedimientos y las prácticas matemáticas producidas por trabajadores de la construcción civil, que también eran alumnos en un curso de educación para jóvenes y adultos en el período nocturno. Los resultados evidenciaron que el conocimiento matemático producido, desarrollado y difundido en las obras tuvo importantes repercusiones curriculares. Esos resultados también mostraron las conexiones del conocimiento local (legitimado por los trabajadores de la construcción civil) con el conocimiento académico (habilitado por la escuela) en la determinación de las modificaciones curriculares (Duarte, 2004) basadas en las prácticas de los miembros de ese grupo. Desde este punto de vista, estos resultados demuestran que estas conexiones afectan positivamente el desarrollo de un currículo matemático en los cursos de formación de profesores de matemáticas.

Los cursos de formación de profesores de matemáticas que desarrollan una acción pedagógica subversiva y responsable con la perspectiva etnomatemática contribuyen a generar nuevos conocimientos cuyo objetivo es solucionar las situaciones-problemas, enfrentadas cotidianamente por los alumnos. Durante el transcurso de las investigaciones, los estudiosos pretenden entender el conocimiento matemático local en sus diversas formas para proporcionar a los futuros docentes información para que pueden transformar sus ideas, los procedimientos y las prácticas matemáticas que usarán en el aula (Rosa y Orey, 2013).

Es importante resaltar que esa discusión demuestra la necesidad de que los futuros profesores rompan la barrera propuesta por la perspectiva occidental y eurocéntrica del conocimiento matemático (Anderson, 1997). Por consiguiente, el conocimiento matemático debe ser interpretado en su sentido más amplio, pues el prefijo *etno* está asociado con los miembros de grupos culturales identificables, por ejemplo, las sociedades nacionales y tribales, los grupos de trabajo, los niños de una determinada edad, los individuos procedentes de diferentes clases profesionales y los miembros de grupos culturales minoritarios y marginales (D' Ambrosio, 1985, p.45).

Ese enfoque puede ayudar en el proceso de reconstrucción del currículo matemático en los cursos de formación de profesores de matemáticas porque pretende relacionar la matemática académica con las actividades socioculturales de los futuros alumnos por medio del uso de los artefactos, mentefactos y sociofactos que, de acuerdo con Huxley (1955), son los componentes esenciales de una determinada cultura:

1. **Artefactos.** Son las manifestaciones observacionales, las técnicas y los materiales, como los sistemas de tratamiento de la tierra, la organización de la producción agrícola y las herramientas desarrolladas y utilizadas por los miembros de grupos culturales distintos. Estas manifestaciones proporcionan pistas e informaciones importantes sobre sus creadores y usuarios.
2. **Mentefactos.** Son los instrumentos analíticos, por ejemplo, los pensamientos, las reflexiones, los conceptos y las teorías que representan las ideas, las nociones y las creencias de los miembros de un grupo cultural específico, que están relacionados con la religión, la lengua, los mitos, las tradiciones artísticas, el folclore y las leyes. Por sus características, son los elementos más importantes y duraderos de una determinada cultura.
3. **Sociofactos.** Son las características que están relacionadas con los vínculos entre los miembros de un determinado grupo cultural, ya que representan la estructura social de esos grupos, por ejemplo, las organizaciones familiares y los sistemas políticos y educativos. Estos elementos pueden ser considerados como los patrones de relaciones interpersonales esperados, aceptados y compartidos entre sus miembros.

En definitiva, esta perspectiva busca reducir los prejuicios, las desigualdades y los prejuicios provenientes de las desconexiones entre los conocimientos matemáticos practicados en el medio académico (global, ético) con los practicados en el día a día (local, émico) (Rosa y Orey, 2016). Por tanto, la acción pedagógica con la perspectiva etno-matemática en los cursos de formación de profesores de matemáticas puede ser entendida como una forma responsable de subversión que

utiliza el aparato teórico y metodológico de este programa y de sus investigaciones para revelar y combatir el privilegio y la autoridad que le fue concedido y atribuido al discurso matemático académico. De esa forma, este enfoque permite comprender que este privilegio y esta autoridad resultaron del proceso de colonización e influyen en la distribución del poder en la sociedad moderna (Fitzsimons, 2003).

Ese contexto posibilita una utilización análoga de subversión responsable para la conducción de un proceso de renovación curricular en los cursos de formación de profesores de matemáticas, que esté basada en la perspectiva etnomatemática para que se pueda iniciar un proceso de cambio educacional. Sin embargo, es preciso que los futuros profesores estén dispuestos a asumir los riesgos asociados a esta decisión. Frente a ello, es importante resaltar que este proceso de toma de decisión es uno de los componentes más importantes de la subversión responsable, pues puede ser entendido como una lucha contra los efectos deshumanizantes de la autoridad burocrática (Haynes y Licata, 1995).

En consecuencia, es ineludible estudiar las investigaciones relacionadas con las perspectivas culturales en los cursos de formación de profesores de matemáticas partiendo del reconocimiento de que las matemáticas académicas contemporáneas son predominantemente eurocéntricas. Y, si bien es cierto que el eurocentrismo participó positivamente en el desarrollo científico de los últimos 500 años, al mismo tiempo dio lugar a una visión ideológica que ha dificultado el desarrollo y la valoración de las ideas, procedimientos y prácticas matemáticas locales, específicamente, las practicadas por los grupos culturales vencidos en el proceso de colonización. Otra consecuencia nefasta, es que creó un paradigma científico que desembocó en un poder militar destructivo, provocó un caos financiero y contribuyó a la ruina ambiental del planeta.

Los resultados del estudio dirigido por Rosa (2010, p.510) mostraron que la educación matemática tradicional procura transmitir una cantidad de técnicas y estrategias para usarlas en situaciones artificiales, que son presentadas a los alumnos como problemas. Desde este punto de vista, estos problemas están formulados artificialmente, de tal forma que solo propician que los estudiantes memoricen estrategias que,

generalmente, son aburridas, sin interés, desmotivadoras y obsoletas, pues están desvinculadas de su realidad. En este contexto, muchos procedimientos y prácticas provenientes de tradiciones locales se perdieron mientras que otros fueron considerados inferiores y, por tanto, sin importancia.

Hay evidencias crecientes y sustanciales de que el actual paradigma académico vigente en los cursos de formación de profesores de matemáticas precisa considerar también las implicaciones morales, sociales y culturales del currículo escolar. Por eso, el principal objetivo de estos cursos es situar la actividad educativa en los acontecimientos de la vida cotidiana y en las experiencias y vivencias de los futuros profesores en su propio contexto social, cultural y económico. De acuerdo con Freire (1993, p.148), este enfoque metodológico abre una serie de posibilidades para que los futuros profesores puedan enfrentarse a las prácticas docentes en las instituciones escolares.

A partir del punto de vista de que los cursos de formación de profesores de matemáticas, basados en la perspectiva etnomatemática, procuran desarrollar las habilidades para observar fenómenos enraizados en contextos culturales distintos, los resultados obtenidos en esta acción pedagógica pueden dirigir a los futuros profesores hacia la adquisición de nuevos paradigmas sobre la educación matemática, con el objetivo de mejorar su sensibilidad cultural en el proceso de enseñanza y aprendizaje. En consecuencia, la etnomatemática es definida como el estudio de fenómenos matemáticos producidos y desarrollados en una determinada cultura, y difiere de las concepciones tradicionales que consideran a las matemáticas como el fundamento de las ciencias al ser consideradas universales y aplicables en todos los contextos. Como contrapartida, desde la perspectiva etnomatemática, las matemáticas son una construcción humana, social y culturalmente asociada.

De esa manera, los cursos de formación de profesores de matemáticas, basados en una perspectiva etnomatemática, destacan la importancia de la comunidad para las escuelas. Por eso, se requiere que el currículo escolar esté elaborado para valorizar y promover el conocimiento local y las prácticas matemáticas desarrolladas por los miembros de las comunidades escolares. Así, esta perspectiva

proporciona un equilibrio apropiado para el currículo matemático y se convierte en un programa que humaniza las matemáticas por medio de abordajes contextualizados para el desarrollo de las actividades curriculares.

Como las prácticas pedagógicas frecuentemente trascienden los ambientes físicos para acoger los conocimientos y las prácticas presentes en diversos contextos socioculturales, es importante resaltar que en los cursos de formación de profesores de matemáticas estas acciones dan pie a un análisis amplio del contexto escolar (Rosa y Orey, 2015b). Desde este punto de vista, una propuesta pedagógica importante que puede ser ofrecida por estos cursos es el desarrollo de currículos que transformen las matemáticas en un conocimiento vivo que integre situaciones y problemas cotidianos que promuevan interrogantes, análisis y reflexiones críticos de los fenómenos que ocurren en la vida diaria.

De esa manera, es en la propia comunidad escolar donde los futuros profesores pueden encontrar los contenidos matemáticos requeridos para el desarrollo de las actividades curriculares (D' Ambrosio, 2006, p.80). Por consiguiente, hay que diversificar las estrategias de enseñanza utilizadas en el aprendizaje desde una perspectiva etnomatemática, lo que vuelve necesario que los futuros profesores se comprometan con el uso de metodologías innovadoras para que puedan ayudar a los alumnos a alcanzar su potencial educativo.

La subversión responsable, especialmente en relación con la etnomatemática en los cursos de formación de profesores de matemáticas es un programa que pretende combatir los efectos deshumanizantes de la autoridad burocrática curricular. También pretende ser una acción pedagógica guiada por la búsqueda de la paz. Para Haynes y Licata (1995), el objetivo de esta subversión responsable es garantizar que las burocracias curriculares no hagan un flaco servicio a los alumnos, pues muchas veces las políticas públicas y los procedimientos institucionales no guardan conexión real con la comunidad escolar. Este tipo de subversión responsable significa ayudar a los futuros profesores a desarrollar redes de trabajo con otros profesionales que compartan visiones emancipadoras del mundo y conocimientos matemáticos y pedagógicos. También los insta a construir redes con los alumnos y a

lograr una comprensión política que los faculte negociar con el sistema (aprender a ser subversivo, pero responsable) para combatir las tareas, encargos y cometidos que estén desvinculados del bienestar e interés de los alumnos (Gutiérrez, 2013).

La subversión responsable, por tanto, es imperiosa para el desarrollo matemático curricular de los cursos de formación de profesores de matemáticas, cuyo objetivo es ayudar a los futuros profesores a servir a sus alumnos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la asignatura. Desde este punto de vista, este enfoque debe ser considerado como la principal preocupación de cualquier sistema educativo para que los profesores alcancen las necesidades educacionales, cognitivas y pedagógicas de sus alumnos. Visto así, supone una perspectiva innovadora para la educación matemática en los cursos de formación de los profesores en cuanto propicia una discusión acerca de la manera en que debe desarrollarse la formación docente para ayudar efectivamente a los futuros maestros y lo hace al reconocer la relación entre el conocimiento cultural y el currículo de matemática.

Rosa, Orey y Gavarrete (2017) argumentan que este enfoque fomenta una actitud reflexiva sobre las relaciones entre la universalidad y los contextos particulares, y promueve la creatividad docente en el desarrollo de un plan de estudios para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que esté conectado con el entorno sociocultural de los estudiantes. Igualmente, promueve un enfoque sociocultural en el currículum a fin de luchar contra la descontextualización curricular que resulta de una visión monocultural que no ha favorecido el empoderamiento de los estudiantes ni la posibilidad de impactar en diferentes realidades. Este enfoque, en definitiva, busca trascender el etnocentrismo y enriquecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas desde los programas de formación docente.

4. Conclusiones

Los cursos de formación de profesores de matemáticas constituyen áreas estratégicas para lograr la equidad y la justicia social. Y lo hacen al invitar a los futuros docentes a repensar la práctica docente y a considerarla como un acto subversivo y responsable. Con esta reflexión

se puede modificar el currículo matemático, así como las prácticas propias del aula. Esta perspectiva nace porque se considera urgente e indispensable que los alumnos aprendan los contenidos matemáticos en relación con sus contextos socioculturales. La premisa es que los grupos culturales poseen sus propios saberes, diferentes en muchas formas de los saberes propugnados por el eurocentrismo.

La etnomatemática, como la concibió D' Ambrosio (1985, p.47), puede ayudar a los profesores a comprender los caminos epistemológicos y pedagógicos de su práctica docente en clase, en consecuencia, esa acción pedagógica es una posibilidad curricular para los cursos de formación de profesores de matemáticas que procuran la construcción del conocimiento matemático para sus alumnos. De esta manera, este abordaje es subversivo, pero responsable porque busca el desarrollo de una educación matemática que promueva la inclusión de los alumnos que poseen diferentes formas de pensar y diversos estilos de aprendizaje, pues provienen de grupos culturales distintos. Además, posibilita que los profesores discutan y compartan sus experiencias y vivencias cotidianas y promueve la valorización y el respeto a los diversos modos de *hacer* matemáticas que estén en desacuerdo con las prácticas curriculares producidas en clase.

En este capítulo se abordaron ideas claves para comprender mejor a la etnomatemática como campo de investigación en la formación docente y también su papel en la educación matemática. Considera que es de sumo valor promocionar una transformación epistemológica, didáctica y pedagógica en la educación matemática, una que pueda generar cambios curriculares en los cursos de formación de los profesores de matemáticas. La perspectiva, a fin de cuentas, es válida porque supone una forma de buscar la igualdad y equidad de los alumnos provenientes de grupos culturales distintos.

Referencias bibliográficas

- Anderson, S. E. (1997). Worldmath curriculum: fighting Eurocentrism in mathematics. En A. Powell y M. Frankenstein (Eds.), *Ethnomathematics: challenging Eurocentrism in mathematics education* (pp. 291-306). SUNNY.
- Cheng, Y. (2005). *New paradigm for re-engineering education*. Springer.
- D' Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 5(1)1, 44-48.
- D' Ambrosio, U. (2006). The Program Ethnomathematics and the challenges of globalization. *Circumscribere: International Journal for the History of Science*, 1, 74-82.
- D' Ambrosio, B. y Lopes, C. (2015a). *Creative insubordination in Brazilian mathematics education research*. Lulu Press.
- D' Ambrosio, B. y Lopes, C. (2015b). Insubordinação criativa: um convite à reinvenção do educador matemático. *BOLEMA*, 29(51), 1-17.
- Duarte, C. (2004). Implicações curriculares a partir de um olhar sobre o mundo da construção civil. En G. Knijnik, F. Wanderer y C. J. Oliveira (Eds.), *Etnomatemática: currículo e formação de professores* (pp. 195-215). EDUNISC.
- Durán, L. y Palmer, D. (2014). Pluralist discourses of bilingualism and translanguaging talk in classrooms. *Journal of Early Childhood Literacy*, 14(3), 367-388.
- Fitzsimons, G. (2003). What counts as mathematics? Technologies of power in adult and vocational education. *ZDM*, 35(6), 323-324.
- François, K. (2010). The role of ethnomathematics within mathematics education. *Proceedings of CERME 6* (pp. 1571-1526). CERME.
- Freire, P. (1993). *Pedagogy of the oppressed*. Continuum Books.
- Gutiérrez, R. (2012). Embracing Nepantla: rethinking 'knowledge' and its use in mathematics teaching. *REDIMAT-Journal of Research in Mathematics Education*, 1(1), 29-56.
- Gutiérrez, R. (2013). The sociopolitical turn in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 44(1), 37-68.
- Gutiérrez, R. (2015). Nesting in Nepantla: the importance of maintaining tensions in our work. En N. M. Russell, C. M. Haynes y F. Cobb (Eds.), *Interrogating whiteness and relinquishing power: white faculty's commitment to racial consciousness in STEM classrooms*. Peter Lang.
- Hallinan, M. (1994). *Tracking: from theory to practice*. *Sociology of Education. Sociology of Education*, 67(2), 79-84.
- Haynes, E. y Licata, J. (1995). Creative insubordination of school principals and the legitimacy of the justifiable. *Journal of Educational Administration*, 33(4), 21-35.
- Helfrich, H. (1999). Beyond the dilemma of cross-cultural psychology: resolving the tension between etic and emic approaches. *Culture and Psychology*, 5, 131-153.

- Hutchinson, S. (1990). Responsible subversion: a study of rule-bending among nurses. *Scholarly Inquiry for Nursing Practice*, 4(1), 1-3.
- Huxley, J. (1955). *Evolution, cultural and biological*. Yearbook of Anthropology. University of Chicago.
- Khondker, H. (2004). Glocalization as globalization: evolution of a sociological concept. *Bangladesh e-Journal of Sociology*, 1(2), 1-9.
- Kloos, P. (2000). The dialectics of globalization and localization. En D. Kalb, M. R. Staring, B. van Steenberg y N. Wilterdink (Eds.), *The ends of globalization: bringing society back in* (pp. 281-298). Rowman & Littlefield.
- Ladson-Billings, G. (2006). Yes, but how do we do it: Practicing culturally relevant pedagogy. En J. Landsman y C. W. Lewis (Eds.), *White teachers/diverse classrooms* (pp. 29-42). Stylus.
- Lloyd, J. (2011). For clues to HAI prevention, seek out positive deviance. *Healthcare Purchasing News*, 35(1), 46-47.
- Lopes, C. y D' Ambrosio, B. (2016). Professional development shaping teacher agency and creative insubordination. *Ciência & Educação*, 22(4), 1085-1095.
- Orey, D. (2000). The ethnomathematics of the Sioux tipi and cone. En H. Selin (Ed.), *Mathematics across culture: the history of non-western mathematics* (pp. 239-252). Kluwer Academic Publishers.
- Orey, D. y Rosa, M. (2014). How we came to use a combination of emic, etic, and dialogical approaches in the field research ethnomodeling. En M. Trujillo Tsijli (Org.), *Memória IX Festival Internacional de Matemática* (pp. 167-179). CIENTEC.
- Presmeg, N. (1998). Ethnomathematics in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1, 317-339.
- Rosa, M. (2010). *A mixed-methods study to understand the perceptions of high school leaders about English Language Learners (ELL) students: the case of mathematics* [Tese de Doutorado]. College of Education. Sacramento, California.
- Rosa, M. y Orey, D. (2012). O campo de pesquisa em etnomodelagem: as abordagens êmica, ética e dialética. *Educação e Pesquisa*, 38(4), 865-879.
- Rosa, M. y Orey, D. (2013). Ethnomodeling as a research theoretical framework on ethnomathematics and mathematical modeling. *Journal of Urban Mathematics Education*, 6(2), 62-80.
- Rosa, M. Orey, D. (2015a). Evidence of creative insubordination in the research of pedagogical action of ethnomathematics program. En B. S. D' Ambrosio y C. E. Lopes (Orgs.), *Creative insubordination in Brazilian mathematics education research* (pp. 131-146). Lulu Press.
- Rosa, M. y Orey, D. (2015b). A trivium curriculum for mathematics based on literacy, matheracy, and technoracy: an ethnomathematics perspective. *ZDM*, 47(4), 587-598.

- Rosa, M. y Orey, D. (2016). Ethnomodelling: exploring glocalization in the contexts of local (emic) and global (etic) knowledges. *International Journal for Research in Mathematics Education*, 6(1), 196-218.
- Rosa, M. y Orey, D. (2017). *Influências etnomatemáticas em salas de aula: caminhando para a ação pedagógica*. Appris.
- Rosa, M., Orey, D. y Gavarrete, M. (2017). El programa etnomatemática: perspectivas actuales y futuras. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 10(2), 69-87.
- Shirley, L (2001). Ethnomathematics as a fundamental of instructional methodology. *ZDM*, 33(3), 85-87.
- Sue, D. y Sue, D. (2003). *Counseling the culturally diverse: theory and practice*. John Wiley & Sons.

CAPÍTULO 6

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN EL ESTUDIO DE LOS PROCESOS DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE GEOMETRÍA

María José Ferreira da Silva

zeze@pucsp.br

Pontificia Universidad Católica de São Paulo

São Paulo, Brasil

Saddo Ag Almouloud

saddoag@pucsp.br

Pontificia Universidad Católica de São Paulo

São Paulo, Brasil

1. Introducción

Desde hace algún tiempo la enseñanza de la geometría ha sido motivo de preocupación para los investigadores. Pavanello (1993) encontró que la enseñanza se enfocaba en el álgebra, lo que llevaba a los estudiantes a operar reglas sin cuestionar, dejando en un segundo plano una enseñanza que forje el pensamiento crítico y autónomo, el análisis de hechos, relaciones y deducción. Poco después, en 1995, Lorenzato sugirió hacer un esfuerzo a las áreas educativas para favorecer cambios en la enseñanza de la geometría, ya que constató que había toda una generación que no la había estudiado y, por tanto, no sabría enseñarla. Desde entonces, muchos investigadores han trabajado para destacar los procesos de aprendizaje de la geometría. Mirando de cerca a la geometría elemental, podemos considerarla como un campo importante de las matemáticas —como objeto de estudio y como instrumento para otras áreas—, lo que da lugar a la construcción de una infinidad de situaciones para su enseñanza. Sin embargo, los profesores de educación básica la señalan como uno de sus problemas para la docencia (Manrique, Silva y Almouloud, 2002).

Como respuesta a los diferentes problemas de enseñanza, no solo de la geometría, la Secretaría de Educación Fundamental del MEC presentó en 1998 los Parámetros Curriculares Nacionales- PCN (Brasil, 1998) que señalaban la necesidad de formación docente para nuevas alternativas de enseñanza. Bajo este contexto, elaboró el PCN+ (Brasil, 2002) para la enseñanza media (alumnos de 15 a 17 años) sugiriendo la importancia de: reconocer su naturaleza y ubicar el objeto de estudio dentro de los diferentes campos de las matemáticas, es decir, decidir utilizar formas algebraicas, numéricas, geométricas, combinatorias o estadísticas. Por ejemplo, para calcular distancias o efectuar mediciones en sólidos, utilizar conceptos y procedimientos de

geometría y medidas, mientras que, para analizar la relación entre espacio y tiempo en el movimiento de un objeto, elegir el recurso algebraico de las funciones y sus representaciones gráficas (p.115).

Sin embargo, estos parámetros no causaron el efecto deseado, ya que las evaluaciones externas de los alumnos continuaron mostrando un bajo desempeño, no solo en Geometría, sino en Matemáticas en general. Se cree que faltó discusión de los documentos, tanto en la formación inicial como en la continua, ya que el primero no ofrecía una propuesta para la enseñanza de los diferentes contenidos, y el segundo, impartido en cursos esporádicos, no fue suficiente para un cambio efectivo en la práctica en la sala de clase.

Con el afán de buscar respuestas a diversas interrogantes y nuevas prácticas para la enseñanza de la geometría, el grupo de investigación del Programa de Posgrado en Educación Matemática de la PUC-SP (Pontificia Universidade Católica de São Paulo) entre los años 2000 y 2002 desarrolló un proyecto (financiado por la FAPESP, Fundación de Amparo e Investigación del Estado de Sao Paulo) con el fin de estudiar los factores y estrategias que podrían influir en la enseñanza y en el aprendizaje de las nociones geométricas en los grados finales de la Enseñanza Fundamental (alumnos de 11 a 14 años) con profesores de matemáticas en una educación continua. Algunos resultados, presentados por Manrique, Silva y Almouloud (2002), apuntaron a una fuerte tendencia de los docentes a trabajar en el aula con contenidos enfocados solo en la métrica, justificando su uso en la vida diaria del alumno. Pero, al mismo tiempo, mostraron dificultades para lidiar con la noción de distancia, por ejemplo, mostrando una comprensión incompleta o errónea y concepciones falsas.

En 2004, Silva, Manrique y Almouloud encontraron pequeños cambios en las prácticas de estos docentes y sugirieron la falta de confianza en los formadores, en las estrategias empleadas, en las otras personas del grupo y en sus propios conocimientos como uno de los factores que interfieren en la posibilidad de mayores cambios. Y reveló que, en general, los docentes estudiados no cuentan con un repertorio adecuado para articular los enunciados, presentan dificultades en la comprensión de las definiciones matemáticas y en la interpretación de formas y elementos presentados en una figura. Si bien los planes de

estudio resaltan la importancia de rescatar la enseñanza de la geometría en la educación básica, el docente no sabe claramente qué hacer.

Perpetuando el pobre desempeño de los estudiantes en matemáticas en las evaluaciones externas y la necesidad de un currículo nacional, el Ministerio de Educación llamó a la sociedad a desarrollar una Base Nacional Común Curricular (BNCC) que fue aprobada en el 2017 para Educación Primaria y para la Enseñanza Secundaria, en el 2018 (Brasil, 2018).

En una comparación, no realizada a profundidad, entre los PCN y la BNCC para bachillerato, Silva y Almouloud (2018) mostraron que la BNCC presenta como una habilidad que desarrollar “el cálculo de áreas totales y volúmenes de prismas, pirámides y cuerpos redondos (cilindro y cono) en situaciones reales, como el cálculo de costos de material para revestimientos o pinturas de objetos cuyos formatos son composiciones de los sólidos estudiados” (p.529) y sugirieron la construcción de modelos a partir de estos. Sin embargo, el documento no se refiere a la esfera como objeto de estudio, es decir, no enfatiza el desarrollo de conocimientos matemáticos para el estudio de problemas relacionados con la Tierra, por ejemplo. También señalan que el documento no se refiere a *planificación* o poliedros que fueron estudios sugeridos en los PCN.

Si bien documentos de dos décadas sugieren una enseñanza de la geometría orientada a la construcción de conocimientos críticos sobre el espacio que nos rodea, hasta el día de hoy su enseñanza es bastante precaria y se basa en el estudio de objetos geométricos enfocados solo en la métrica, con la presentación, principalmente, de fórmulas por parte del profesor. Pero, en la actividad mencionada anteriormente por la BNCC, se percibe una remisión a una teoría de la didáctica de las matemáticas, la de los *registros de representación semiótica* como algo que se debe considerar en la enseñanza. Eso es lo que se abordará a continuación.

Este capítulo tiene como objetivo ofrecer algunas reflexiones teóricas sobre la enseñanza de la geometría en la educación básica, más específicamente de la geometría espacial. Numerosos estudios de las últimas décadas señalan que la docencia de esta área no se da de manera satisfactoria en este nivel educativo, aun con las sugerencias

dadas desde 1998 por los Parámetros Curriculares Nacionales, lo que no estimula el desarrollo cognitivo del alumno en términos de percepción, justificación y razonamiento para comprender o transformar el mundo.

En este sentido, el aporte de la teoría de registros de representación semiótica a la didáctica de las matemáticas autoriza elaborar situaciones para la enseñanza de la geometría que propician no solo la conversión de representaciones y el desarrollo de diferentes tipos de aprehensión de figuras, sino también el uso de softwares de representación dinámica que posibilitan tratar de otra forma contenidos propios o no del currículo. Se describirán algunos resultados de estudios que asocian esta teoría a otras y que conducen a una nueva percepción de contenidos de geometría espacial, incluidos o no en el currículo de educación básica, pero que permiten reflexionar sobre su pertinencia a integrar ese currículo.

2. Registros de representación semiótica -TRRS

Según Duval (2011, p.100), además de los sistemas que representan códigos, que cumplen la función de comunicación, existen otros que cumplen las funciones cognitivas de objetivación y tratamiento, es decir, permiten la transformación del contenido de representaciones que el primero no provoca. Para el autor, un registro es un sistema semiótico cognitivamente creativo que, en primer lugar, debe producir representaciones que facilitan el acceso a objetos inaccesibles. En segundo lugar, debe determinar un campo de operaciones específicas que transformen las representaciones en otras nuevas en el interior del registro y que cambien el contenido de representación de un objeto, de un registro a otro. Estas dos formas de transformación se denominan *tratamiento* y *conversión*; la primera llama la atención por ser privilegiada, mientras que la segunda puede causar dificultades a los estudiantes.

Para Duval (2006) “la complejidad cognitiva subyacente a los procesos de pensamiento en matemáticas radica en el hecho de que hay dos formas bastante diferentes de transformaciones que nunca se consideran explícitamente en la enseñanza” (p.105). Agrega que

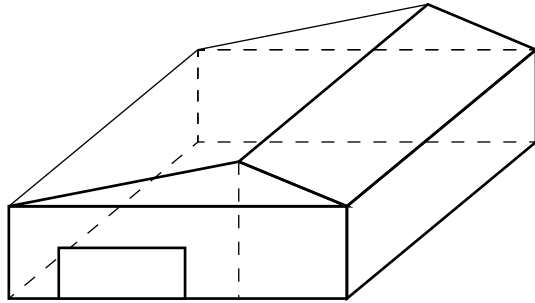
los procesos de pensamiento matemático dependen de una sinergia cognitiva de los registros de representación y que su coordinación amplía la capacidad mental. Para el autor, el desafío de la educación matemática es, en primer lugar, desarrollar la capacidad de cambiar el registro porque incluso las representaciones más icónicas o concretas deben articularse con representaciones producidas en sistemas semióticos.

En el caso de la enseñanza de la geometría, según Almouloud (2010), esta referencia explica el papel fundamental de las representaciones semióticas en las actividades cognitivas con las funciones de comunicación, tratamiento intencional y conciencia (objetivación). Para Duval (1995), la geometría involucra tres formas de proceso cognitivo que cumplen funciones epistemológicas específicas: visualización (como un proceso que examina el espacio), construcción (como un proceso realizado por instrumentos) y razonamiento (en el proceso del discurso para la extensión del conocimiento, para la prueba y para la explicación). Aunque estos procesos pueden desarrollarse por separado, la construcción puede conducir a la visualización, pero depende de la conexión entre las propiedades matemáticas y las técnicas de construcción, mientras que el razonamiento depende de un cuerpo de proposiciones.

Para el desarrollo de estos procesos, el autor ofrece cuatro formas distintas de aprehender una figura (una representación en el registro de representación figurativa):

La *aprehensión perceptiva* es la que implica la interpretación de las formas de la figura en una situación geométrica para identificar o reconocer de forma directa el objeto representado. Por ejemplo, en la Figura 1, como reconocimiento directo del objeto podemos decir que se representa una casa o un galpón.

Figura 1. Aprehensión perceptiva - la figura de una casa o un cobertizo

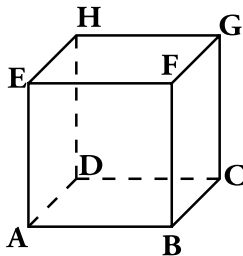


Fuente: Elaboración propia

La *aprehensión discursiva* es la que permite interpretar los elementos de la figura geométrica, privilegia la articulación de los enunciados en una red semántica de propiedades del objeto, además de las que pueden ser explícitas en una leyenda o por las hipótesis, tal como se observa en la Figura 2.

Figura 2. Aprehensión discursiva

Cubo ABCDEFGH, portanto, ABEF congruente a BCFG

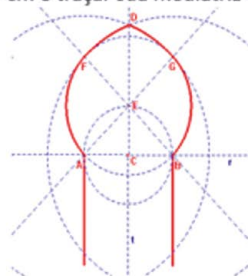


Fuente: Mello (2015)

La *aprehensión secuencial* se desarrolla en tareas de construcción o descripción con el objetivo de reproducir una figura con la ayuda de instrumentos, como se observa en la Figura 3.

Figura 3. Aprehensión secuencial para la construcción de un arco de herradura

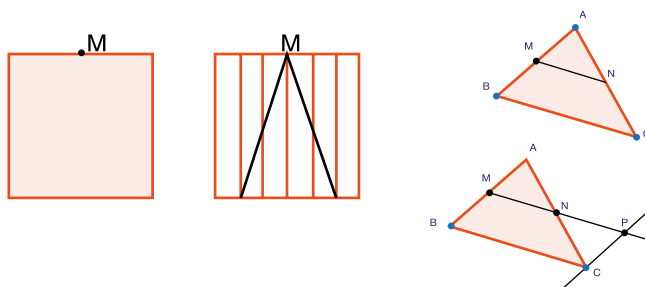
- Para sua construção consideraremos o vão AB com 4 cm e traçar sua mediatriz t e o ponto C, médio de AB.
- Traçando a circunferência de centro C e raio AB determinamos na interseção superior com a reta t, o ponto E.
- A circunferência de centro E e raio EA intercepta as retas AE e BE, respectivamente, nos pontos de concordância F e G e determina os arcos AF e GB.
- Para concluir o arco procurado traçamos as circunferências de centro em A e raio AG e a circunferência de centro em B e raio BF, que determinarão o ponto D na sua interseção superior e os arcos FD e DG.



Fuente: Elaboración propia

La *aprehensión operativa* se construye en situaciones que solicitan posibles modificaciones a una figura, lo que sugiere una reorganización perceptiva que pueda conducir a la solución de un problema dado, como se nota en la Figura 4.

Figura 4. Aprehensión operativa



Fuente: Elaboración propia

Duval (2011) también distingue tres tipos de modificaciones para la *aprehensión operativa* de una determinada figura: (a) la modificación **óptica** que permite aumentar, disminuir o deformar una figura a partir de la producción de una imagen de la figura (homotecia); (b)

la modificación *posicional*, que mueve una figura dada sin cambiar las medidas y la forma (rotación, traslación etc.), y (c) la modificación *mereológica* que descompone o compone una figura a partir de la relación de la parte-todo, en particular, la *reconfiguración* (basada en la percepción) que consiste en reorganizar una o más subfiguras diferentes de una figura dada en otra figura y la *deconstrucción dimensional* que reconoce unidades figurativas 2D/2D o 3D/2D. Ciertamente, para el autor;

La solución de un problema de Geometría ‘en el espacio’ requiere otra mirada, una que le permita ver la forma 2D obtenida por la intersección de un sólido con un plano cualquiera en el espacio. Y eso requiere mucho trabajo para pasar de un objeto 3D/3D a sus múltiples representaciones posibles en 3D/2D (p.93).

La resolución de un problema puede requerir la articulación entre dos o más tipos de aprehensión: la articulación entre las aprehensiones perceptivas y discursivas, en la que es necesario ver la figura desde las propiedades evidentes o las hipótesis y no desde las formas que se destacan y que caracterizan la *figura geométrica* en la que la aprehensión discursiva depende de la aprehensión perceptiva. La *visualización* es la articulación entre las aprehensiones perceptivas y operativas en la que la percepción no requiere conocimiento matemático, pero puede dominar la aprehensión operativa. La *heurística y la demostración* son articulación entre las aprehensiones operativas (subordinadas a la perceptiva) y las discursivas. La *construcción geométrica* es la articulación entre operaciones discursivas y secuenciales que requieren la perceptiva.

Para Duval (2011) “es necesario proponer tareas en las que se excluya toda actividad de medición y de cálculo. Para aprender a ver, los estudiantes deben aprender a trabajar sin recurrir primero a los aspectos métricos” (p.92). Y agrega que las operaciones figurativas son esenciales para poder aplicar fórmulas o para aplicar una propiedad y que las tareas deben ser diferentes para las operaciones mereológicas de reconfiguración y deconstrucción dimensional.

Además de este marco ¿cómo podemos explicar de manera específica la razón para enseñar geometría en la escuela básica?

a. ¿Por qué enseñamos geometría?

Como se ha visto, el proceso de aprendizaje de la geometría lleva al alumno a desarrollar un pensamiento que le permite comprender, describir y representar el mundo en el que vive, considerando que su estudio estimula la observación y percepción de semejanzas y diferencias, la identificación de regularidades, etc., además de ser un terreno fértil para las relaciones con otras áreas del conocimiento.

Para Parzysz (2006), el objetivo de la enseñanza de geometría en la escuela básica es llevar a los estudiantes a disponer progresivamente de una geometría teórica:

Obtenida como un modelado del espacio físico que permite responder, sin ambigüedades, a preguntas en el dominio espacial —incluso en la vida cotidiana— por el hecho de que ella no está sujeta al azar y a las contingencias ligadas a la percepción (p.147).

Marmo Carlos y Marmo Nicolau (1995, p.6) argumentan que el diseño geométrico permite al alumno desarrollar una comunicación universal para la transmisión de un lenguaje específico de las figuras, así también el poder sacar diversas conclusiones a partir de poca información, lo que permite liberar la creatividad.

Por otro lado, para Gascón (2003) la didáctica de las matemáticas no puede negarse a explicar por qué existe lo que existe y por qué no existe lo que no existe en el ámbito de las instituciones didácticas. Para él, las situaciones centrales de la geometría elemental están ligadas a la determinación y construcción de figuras geométricas. También considera que la geometría sintética (sin referencias cartesianas, ni fórmulas) posee técnicas limitadas para la introducción de la enseñanza de la geometría analítica y sus técnicas, haciendo de la limitación de las técnicas sintéticas la razón de ser de las técnicas analíticas, aunque, a menudo, la geometría analítica requiera el uso de técnicas sintéticas.

Desde el punto de vista del conocimiento que se pretende que el alumno construya, Chevallard (1990) afirma:

Todo conocimiento, de hecho, es producido por un trabajo específico y el conocimiento producido puede ser integrado a un saber, ser duradero, mezclarse y volverse natural. Como ejemplo de este conocimiento natural presenta la regla que permite calcular la medida del área de un triángulo como siendo el semiproducto de

la medida de la base por la altura del triángulo. El conocimiento todavía puede sobrevivir en los márgenes de un saber y, por lo tanto, necesita ser redescubierto indefinidamente, como es el caso de la fórmula atribuida a Heron para el cálculo de esa misma medida en función de las medidas de sus lados. De los saberes trabajados son generados, con más frecuencia, conocimientos efímeros, que tendrán que ser reinventados para luego ser olvidados porque no fueron institucionalizados en el saber. Esto ocurre todos los días, en cada clase de cada escuela (p.10).

Entonces se debería enseñar geometría por ser un área que ayuda a desarrollar cognitivamente al alumno en términos, principalmente, de percepción, justificación y razonamiento para no solo entender el mundo, sino también poder participar en acciones que lo transformen con creatividad. Además, la didáctica de las matemáticas tiene mucho que aportar para que la enseñanza potencie la construcción de conocimientos naturales explícitamente relacionados con los saberes matemáticos. Es en este sentido que, a continuación, se presentan algunos ejemplos de resultados de investigaciones que utilizaron este marco teórico para desarrollar reflexiones que pueden contribuir a la enseñanza de la geometría en la educación básica.

3. Algunas reflexiones para la enseñanza de la geometría

En vista de lo anterior, se coincide con Almouloud (2010) cuando afirma que tenemos que construir situaciones encaminadas a aprender la geometría haciendo que las figuras geométricas jueguen su papel heurístico y provoquen sus diferentes aprehensiones, considerando la importancia de los registros de representación semiótica. Así, se considera que para la construcción de conocimientos geométricos es necesario sustentar su enseñanza en construcciones geométricas, actividades de resolución de problemas geométricos, actividades de formulación y de pruebas asociadas con la toma de decisiones y comprensión.

El grupo de investigación, bajo esta perspectiva, presenta algunas investigaciones que se han desarrollado en torno a la enseñanza o aprendizaje de la geometría. La mayoría de ellas se basaron, además

de la TRSS antes mencionada, en la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau (1997) y en la Teoría Antropológica de la Didáctica (TAD) de Chevallard de 1999, de las cuales se introducen algunas reflexiones de forma sucinta.

La TSD busca crear un modelo de interacción entre el alumno, el saber y el ambiente en el que debe tener lugar el aprendizaje. La construcción de la teoría se basó en algunos conceptos fundamentales como: situación didáctica, situación a-didáctica, situación fundamental, devolución, ambiente antagónico y contrato didáctico. Estos diferentes conceptos conducen a caracterizar al proceso de aprendizaje a través de una serie de situaciones reproducibles, que muchas veces conducen a la modificación del comportamiento de los estudiantes involucrados en este proceso que busca la construcción de un determinado conjunto de conocimientos. El objeto central de la TSD no es el sujeto cognitivo, sino la situación didáctica en la que se identifican las interacciones que se establecen entre docente, alumno y saber. Brousseau (1997) pretende teorizar los fenómenos vinculados a estas interacciones y la especificidad del conocimiento enseñado.

La TAD estudia las relaciones sujeto-institución-saber. Chevallard (1999) estudia al ser humano frente al saber matemático, más específicamente, frente a situaciones matemáticas. Una razón para usar el término antropológico es que la TAD ubica el estudio de las matemáticas dentro del conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales. En esta teoría, las nociones de (tipo de) tarea, (tipo de) técnica, tecnología y teoría permiten modelar las prácticas sociales en general y, en particular, la actividad matemática. Un conjunto de técnicas, tecnologías y teorías organizadas para un tipo de tarea forma una praxeología u organización puntual. La palabra praxeología está formada por dos términos griegos, *praxis* y *logos*, que significan, respectivamente, 'práctica' y 'razón'. Una práctica humana dentro de una institución siempre está acompañada de un discurso más o menos desarrollado, y de un *logos* que la justifica, la acompaña y le da razón.

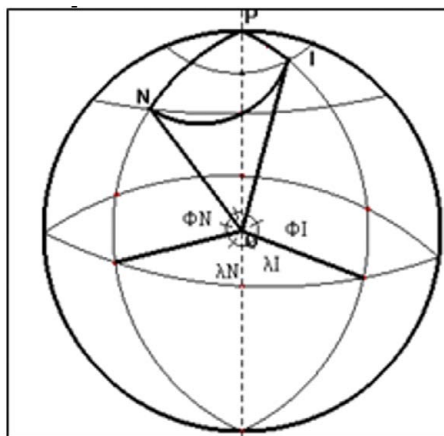
Considerando el espacio reservado para este texto, se discute sobre las investigaciones que se ocupan de la geometría espacial, específicamente, las nociones de geometría esférica y el estudio de los poliedros.

La primera investigación que se presenta es la de Pataki (2003, p.134) quien propuso una reflexión sobre la articulación entre la geometría esférica y la geografía y elaboró una secuencia didáctica, a partir de una situación problema, cuyo objetivo fue mostrar la relación interdisciplinar entre esos dominios del conocimiento. Esta situación-problema llevó a la exploración de algunas nociones vistas más intensamente desde el punto de vista de la geografía, a saber: polos, Ecuador, paralelos terrestres, meridianos, latitud y longitud de un lugar. La elaboración y la experimentación de esta secuencia se basaron en la TSD y fueron trabajadas con profesores de secundaria de escuelas públicas del Estado de São Paulo. La primera actividad fue la siguiente:

El comandante de un barco recibió el siguiente mensaje desde un helicóptero: se localizan náufragos en una isla de coordenadas $\lambda_I = 68^\circ 40'N$ y $\lambda_I = 013^\circ 40'E$. En ese momento, la posición del barco era $\Phi_N = 42^\circ 10'N$ y $\lambda_N = 051^\circ 20'O$. ¿Qué distancia deberá recorrer el barco para llegar a la isla?

Para la representación de esta situación se utilizó un triángulo de vértices P, N, I, correspondientes, respectivamente, a un polo, a la posición del barco y a la posición de la isla, tal como se puede observar en la Figura 5. Tal triángulo está construido sobre una superficie esférica; el globo terrestre se llamó triángulo esférico porque sus lados son arcos de circunferencias máximas, es decir, segmentos de línea recta en el sentido dado por Riemann.

Figura 5. Representación del triángulo PNI

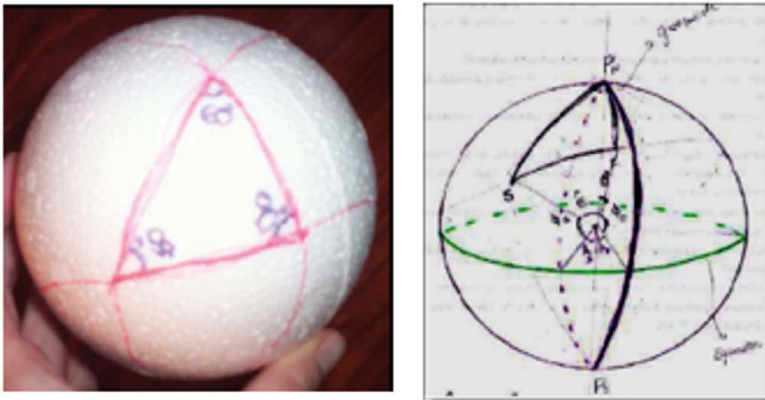


Fuente: Pataki (2003)

Los resultados alcanzados nos llevan a inferir que la secuencia de enseñanza propuesta parece consistente y coherente, pues su construcción, tal como el trabajo de un ingeniero, se basó en cimientos firmes previamente asentados, se construyó a través de la relación entre teoría/experimentación y finalizó con su validación/institucionalización. La situación inicial permitió utilizar diferentes conocimientos relacionando saberes de matemáticas y geografía.

En la investigación de Andrade (2011, p.87, 131) se puede encontrar la apropiación de conceptos elementales de geometría esférica por parte de estudiantes de segundo año de secundaria (16 años). El estudio permitió considerar distancias en la superficie terrestre y fue, por tanto, importante para comprender el espacio en el que vivimos. Propuso una secuencia didáctica compuesta por nueve actividades que utilizaron, entre otros, el registro material (pelota de poliestireno) para resolverlas. En la Figura 6 se observa la representación de un triángulo esférico en una pelota de poliestireno y la representación de la latitud y longitud en registro figurativo del polo, del fuerte y de la ciudad según el contexto del problema que se estaba resolviendo.

Figura 6. Representación en registro material y figurativo de un triángulo esférico



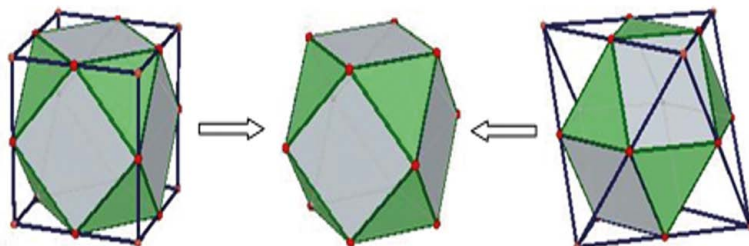
Fuente: Andrade (2011)

La autora demostró que al movilizar conocimiento de la geometría euclidiana es posible llevar a los estudiantes de secundaria a construir conocimientos de geometría esférica. Asimismo, relevó la importancia de utilizar diferentes registros, incluido el material (pelota de poliestireno) para la percepción de la línea recta en esta geometría.

Aun en el sentido de trabajar contenidos que no forman parte del currículum, Almeida (2010, p.131) constató que los sólidos arquimedianos ya fueron enseñados en educación básica en la disciplina del Dibujo a partir de la construcción de modelos planos de sus superficies, pero que desaparecieron por completo cuando esta disciplina dejó de existir. Propuso, entonces, que podrían retornar a la vida con la ayuda de Cabri 3D, basado en la problemática ecológica de Chevallard, para señalar las condiciones para la supervivencia de estos sólidos en la educación. Realizando un estudio epistemológico encontró un procedimiento matemático utilizado por los renacentistas para la construcción de algunos sólidos arquimedianos y, utilizando el software, construyó siete de los trece a partir de cortes (operación de truncamiento) por planos de sólidos platónicos. Por ejemplo, el cuboctaedro representado en la Figura 7, que tiene catorce caras, seis cuadradas y ocho triangulares, se puede obtener truncando planos que pasan por puntos medios de las aristas de un cubo o de un octaedro

regular.

Figura 7. Cuboctaedro generado a partir del cubo u octaedro



Fuente: Almeida (2010)

Según el análisis de las construcciones, la autora identificó tratamientos y conversiones de representaciones en diversos registros y observó que los tratamientos figurativos asociados a la aprehensión discursiva son los que posibilitan estas construcciones. Se infiere la posibilidad de trabajar con sólidos arquimedianos por parte de estudiantes de secundaria porque facilitan el desarrollo de las aprehensiones de una figura, además de relaciones con el campo algebraico porque puede conducir al desarrollo de fórmulas para el cálculo de medidas de sus volúmenes, como lo muestran Silva y Almouloud (2013).

Los autores presentaron una praxeología u organización matemática para el desarrollo de una fórmula para el cálculo de medida del volumen de un octaedro regular a partir de un cubo de arista a , para luego desarrollar la fórmula para el cálculo de medida del volumen de un cuboctaedro. Después de una praxeología para construir la fórmula

$$V = \frac{x^3\sqrt{2}}{3}$$

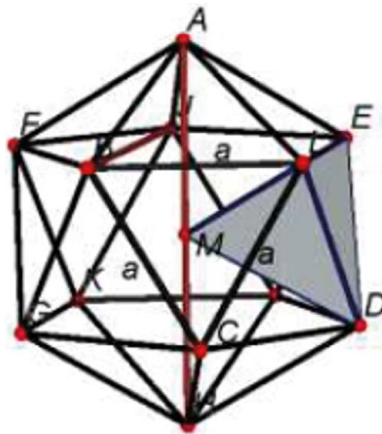
en que x representa la medida de arista del octaedro regular, desarrollaron una para la construcción del cuboctaedro y otra para el desarrollo de una fórmula para el cálculo de medida de su volumen.

Considerando que $a = \frac{4x}{\sqrt{2}}$ resulta así que $V = \frac{5\sqrt{2}x^3}{3}$ es la fórmula que se busca considerando que x sea la medida de arista del cuboctaedro.

La cuestión del desarrollo de fórmulas condujo el estudio de Possani (2012, p.84) cuyo objetivo fue investigar la apropiación del cálculo de medida del volumen del icosaedro regular por parte de estudiantes de tercer año de secundaria, a partir de una secuencia de actividades mediadas por el uso del software Cabri 3D. Desde el punto de vista teórico-metodológico, se basó en la TSD y TRRS, más específicamente en las diferentes aprehensiones de una figura y sus posibles modificaciones.

La secuencia se construyó con el propósito de conseguir que los estudiantes participantes en la investigación movilizaran sus conocimientos de geometría plana y geometría espacial durante la resolución de las tareas propuestas, involucrando al icosaedro regular y el uso del software Cabri 3D. La idea principal del autor es que, utilizando la descomposición de un icosaedro regular en veinte pirámides triangulares congruentes (Figura 8) que encajan perfectamente en el icosaedro y con sus aristas convergiendo hacia el centro de este sólido, los estudiantes se den cuenta de que la medida del volumen del icosaedro es igual a la suma de las medidas de los volúmenes de las veinte pirámides triangulares congruentes.

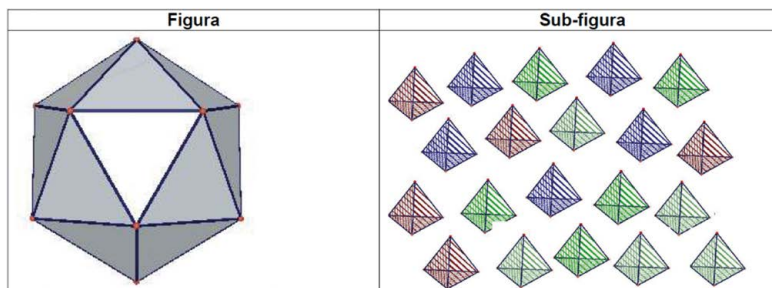
Figura 8. Pirámide triangular que compone el icosaedro regular



Fuente: Possani (2012)

Para realizar esta descomposición, el autor usó la modificación mereológica que consiste en la división de un icosaedro en varias pirámides rectangulares, y las agrupó para formar una nueva. La Figura 9 muestra la descomposición de un icosaedro regular en veinte pirámides triangulares congruentes.

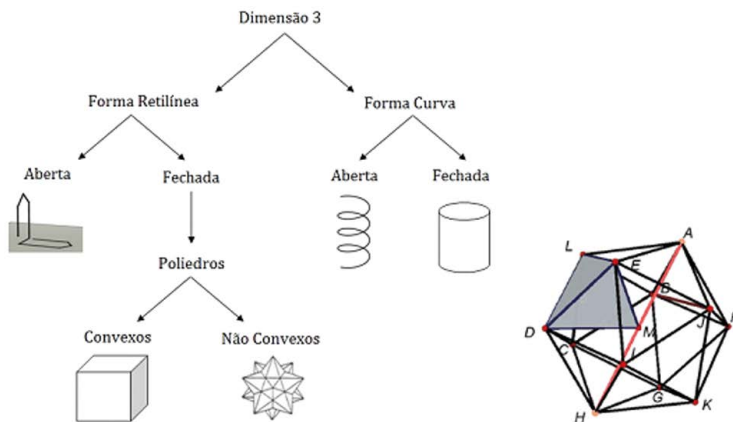
Figura 9. Modificación mereológica de un icosaedro regular



Fuente: Possani (2012)

Palles (2013, p.41, 49), basado en el trabajo de Possani, estudió la secuencia didáctica a partir de la noción de *visualización*. Para ello, la autora amplió la clasificación de las unidades figurativas de Duval considerando figuras de dimensión 3 (Figura 10). Tal ampliación facilita la deconstrucción dimensional de figuras 3D en figuras 2D, como, por ejemplo, la percepción de una pirámide en un icosaedro (p.41 y p.49). La autora constató que el desarrollo de la visualización de figuras geométricas debe cumplir su función heurística: permitir aplicar tratamientos específicos y la aprehensión operativa. Sin embargo, concluye que el autor no exploró lo suficiente este rol heurístico porque privilegió la aprehensión secuencial para la construcción de figuras, y concluye también que algunos cambios en la secuencia podrían, de hecho, permitir el desarrollo de la visualización.

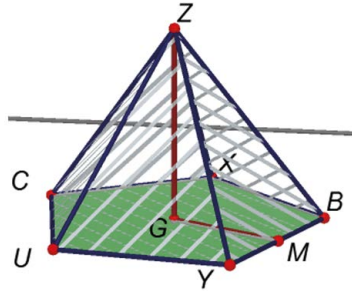
Figura 10. Clasificación de unidades figurativas de dimensión 3 y pirámide en icosaedro regular



Fuente: Palles (2013)

Santos (2016, p.143), utilizando el tema de los volúmenes, exploró la construcción de poliedros regulares a partir de los desarrollados por Euclides en el libro 13 usando Cabri 3D con el fin de verificar si presentan las relaciones métricas necesarias para el desarrollo de fórmulas para el cálculo de medida de sus volúmenes. Organizó su trabajo en tres partes. En la primera exploró las construcciones propuestas por Euclides y las adaptó para ser construidas en el software; en la segunda buscó las relaciones entre medidas que indujeran a deducir fórmulas para el cálculo de medida de sus volúmenes y, en la tercera averiguó las condiciones necesarias para determinar si una pirámide de base regular pentagonal puede o no formar parte de un dodecaedro regular, así como las condiciones para que un tetraedro pueda componer o no un dodecaedro regular. En este estudio verificó, con base en la construcción presentada por Euclides, que si se considera una pirámide con base pentagonal $YUCXB$, se tiene el centro en G y el vértice en el punto Z .

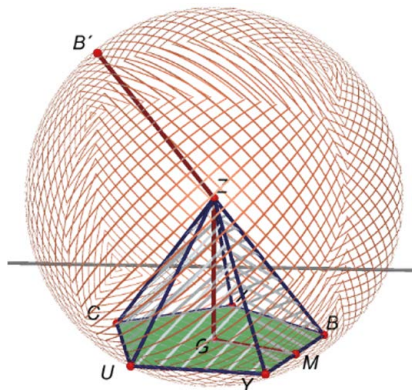
Figura 11. Soporte para la composición de un dodecaedro regular



Fuente: Santos (2016)

Si la altura GZ es $h = \frac{a(3 + \sqrt{5})}{2\sqrt{10} - 2\sqrt{5}}$ y $MG = \frac{a(\sqrt{5} + 1)}{2\sqrt{10} - 2\sqrt{5}}$ con a representando la medida del lado del pentágono o la medida de arista del posible dodecaedro y \overline{BZ} el radio de una posible esfera en la que se podría inscribir el dodecaedro, es decir, $BZ = \frac{d}{2} = r = \frac{a\sqrt{2(5 + \sqrt{5})}}{4}$ entonces Z representa el centro de la esfera en la que está inscrito el dodecaedro. Habrá un punto B' , simétrico de B en relación a Z tal que el segmento BB' representa el diámetro de esa esfera (nótese la Figura 12) y los vértices del pentágono de la pirámide pertenecen a ella.

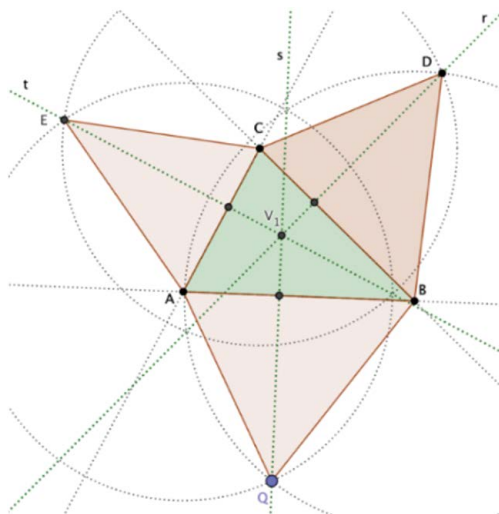
Figura 12. Esfera circunscrita en un posible dodecaedro



Fuente: Santos (2016)

Si bien las planificaciones de superficies de poliedro como posible representación en el plano son parte de la docencia, en general se presentan listas para ser recortadas (Figura 13) para que el modelo construido sea utilizado únicamente para la identificación de vértices, aristas y caras que, con algo de suerte, pueden servir para relacionar esos elementos.

Figura 13. Representación en el plano de superficies de sólidos geométricos



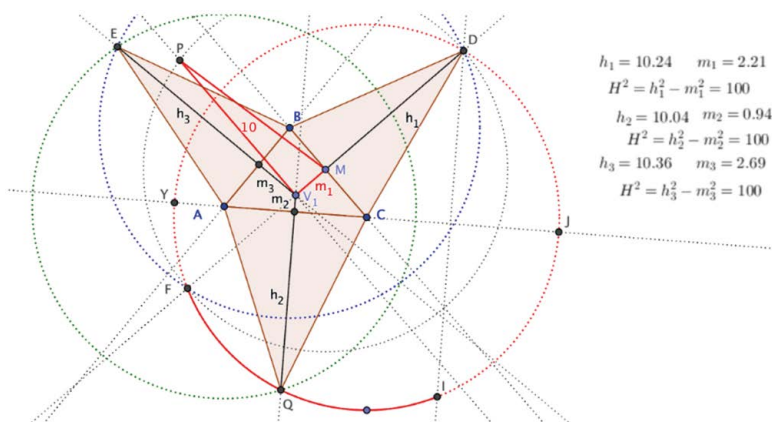
Fuente: Silva y Almouloud (2018)

A partir de esta perspectiva, y seguros de que no se discute sobre sus construcciones, Silva y Almouloud (2018) retoman un artículo publicado en 2001 con el objetivo de ampliar las discusiones y presentar un Modelo Epistemológico de Referencia (MER) para la construcción en Geogebra de planificaciones de superficies de pirámides triangulares de altura determinada. Una pregunta motivadora para el estudio podría ser, por ejemplo: ¿cualquier representación compuesta por cuatro triángulos que tengan de dos en dos un lado común puede representar la superficie de una pirámide triangular?

La búsqueda de respuestas conduce a la verificación de varias relaciones métricas que deben ser consideradas para garantizar que la planificación permita la construcción del modelo tal como se explica en la Figura 14. La observación tanto del modelo espacial como de las conclusiones extraídas para obtener la representación plana llevan a buscar las condiciones para determinar la altura de la pirámide en la planificación y concluir así la tarea de encontrar esa representación para una altura determinada.

Los autores presentan las relaciones métricas necesarias tanto para garantizar la construcción efectiva del modelo como la posibilidad de imponer condiciones específicas para el modelo, como es el caso de la altura de la pirámide. Destacan también la importancia de utilizar Geogebra como herramienta de construcción, lo que, además de posibilitar el movimiento de la figura, también proporciona diversos modelos con apenas una construcción y la posible impresión con las medidas estipuladas.

Figura 14. Relaciones métricas para verificar la altura de la pirámide



Fuente: Silva y Almouloud (2018)

Considerando la importancia de usar varios programas computacionales para la enseñanza de la geometría, Salazar (2009, p.249) utilizó Cabri 3D para trabajar con estudiantes de secundaria con trans-

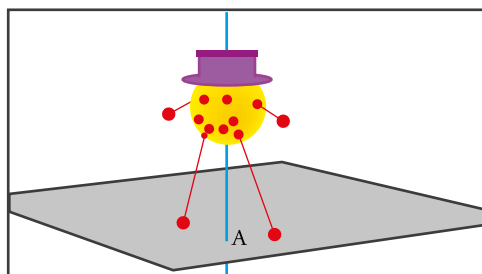
formaciones geométricas en el espacio, fundamentado en el TRRS y el Enfoque Instrumental de Rabardel (1995). El objetivo fue investigar cómo estos estudiantes se apropiaban de los recursos de Cabri 3D en el aprendizaje de estas transformaciones y cómo esta integración interfiere en el proceso.

La primera actividad (Figura 15), luego de ser construida, fue animada con los recursos del software y la transformación de rotación, entre otras. A continuación, se analizó tanto la aprehensión secuencial utilizada por los estudiantes como los esquemas de uso (conceptos y reglas de acción) involucrados en esta construcción. Para la autora, la interacción de los estudiantes con Cabri 3D sirvió para explorar las figuras desde diferentes puntos de vista del observador y facilitó su aprehensión secuencial por parte de los estudiantes. El registro figurativo dinámico facilitó la observación de la aprehensión operativa de las figuras, en concreto la modificación mereológica, y mostró la modificación posicional.

Figura 15. Actividad 1: construcción de la muñeca

Construye una muñeca (cabeza, manos, pies, ojos, sombrero) desde una línea recta perpendicular al plano base, pasando por el punto A.

Guarda su construcción, nombrando el archivo de la siguiente manera: <nombre> _boneco_1

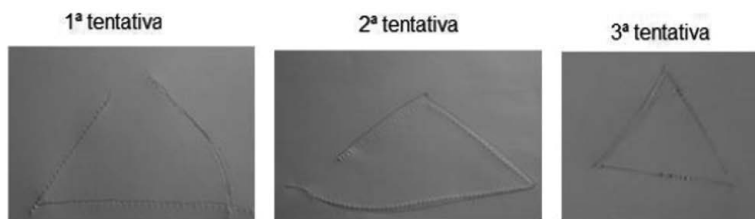


Fuente: Salazar (2009)

La TRRS fue el punto de partida para que Mello (2015) investigara en su tesis el desarrollo de la visualización por estudiantes ciegos. Descubrió que los alumnos reconocen las formas e identifican figuras

planas representadas en relieve sobre papel, pero no reconocen representaciones de sólidos geométricos en perspectiva. También constató que estos alumnos visualizan primero las partes y luego visualizan el todo, aunque presentan en las actividades realizadas las aprehensiones perceptivas, operativas y discursivas, a pesar de un repertorio muy limitado para la geometría. Uno de los problemas percibidos para el desarrollo de la visualización fue la ausencia de aprehensión secuencial, ya que los estudiantes no contaban con herramientas adaptadas para construcciones geométricas. Para llenar este vacío, la autora construyó un tablero de dibujo en relieve positivo para que el estudiante tuviera la oportunidad de dibujar. La Figura 16 muestra los intentos de un estudiante por representar un triángulo.

Figura 16. Representación de un triángulo por un estudiante ciego



Fuente: Mello (2015)

Para la autora, al alumno ciego se le debe enseñar a reconocer las representaciones en perspectiva, ya que durante las entrevistas encontró que pequeñas intervenciones con modelos de madera conducían a tal reconocimiento en las figuras.

Estos trabajos, entre otros, permitieron abordar algunos contenidos de geometría espacial que forman parte o no de los planes de estudio utilizando algún software de representación dinámica. Ellos demostraron la importancia de los *registros de representación semiótica* (incluido el material) para el desarrollo de las diferentes aprehensiones de las figuras por parte de los estudiantes, ya que se colocaron como protagonistas en la construcción de sus conocimientos, y porque permitieron articular los conocimientos geométricos con los conocimientos

algebraicos en actividades de desarrollo de fórmulas para medidas de volúmenes.

4. Conclusiones

El uso de software de representaciones dinámicas es uno de los puntos importantes en las discusiones sobre la enseñanza de la geometría. Según Gravina (2015), las tecnologías digitales permiten la creación, producción y difusión de conocimientos a partir de la interacción con sistemas dinámicos de representación que externalizan e internalizan nuevos pensamientos, en un proceso continuo de acción/reacción entre sujeto y herramienta. Por ello, el uso de figuras dinámicas conduce a exploraciones y actitudes para el desarrollo del pensamiento geométrico de naturaleza deductiva. De igual modo y continuando con el autor, la interfaz interactiva “abierta a la exploración y la experimentación provoca experimentos de pensamiento, diferentes a los que suceden con el apoyo de papel y lápiz” (p.252).

El uso de un software para la representación de figuras en el espacio en perspectiva resultó imprescindible en estos trabajos. Se conmina a que otros estudios demuestren la ayuda de las tecnologías digitales para que los contenidos matemáticos dormidos o incluso olvidados puedan pasar a formar parte de la rutina escolar con el fin de ampliar el universo de la geometría en la escuela y darle un sentido. Un aporte importante en este caso es el dinamismo de las figuras construidas en un registro dinámico. Por otro lado, el desarrollo de las diversas apprehensiones de las figuras, así como sus articulaciones (la visualización, la figura geométrica, la construcción geométrica y la demostración) se vuelven esenciales para la comprensión de la geometría. Para Duval (2011, p. 84), la construcción de figuras por instrumentos o algún *software* provoca confiabilidad y objetividad porque permite verificaciones y observaciones, actividades en las que *ver* es importante.

Además, la reflexión sobre los contenidos que existen en el currículo y la forma en que se enseñan invita a mirar otras formas de enseñanza y a buscar situaciones que lleven a los estudiantes a construir conocimientos y no solo memorizaciones temporales que, en muchos casos, no se recuperarán en el futuro. En algunas de estas obras se

puede ver la importancia de la relación entre geometría y álgebra en el desarrollo de fórmulas para el cálculo de medida de volumen, algunas con posibilidades de ser trabajadas en el bachillerato, como es el caso de los sólidos de Arquímedes y la geometría esférica, o incluso, de una reflexión matemática respecto a cómo construir de manera efectiva un modelo de un sólido geométrico a partir de su representación mediante la planificación.

Otro punto relevante es que la mayoría de estos trabajos muestran a la geometría como fuente para el desarrollo de conocimientos algebraicos. Para Chevallard (1994), la escuela no interviene de tal manera que haga del cálculo algebraico un medio, su enseñanza generalmente se lleva a cabo sin relación con un objetivo que justifique las manipulaciones realizadas con expresiones algebraicas. Para el autor, la escuela niega al álgebra su papel como herramienta para la creación de conceptos y tiende a reducirla a una actividad automática sin ningún propósito real de creación, lo que muestra una cierta marginación epistemológica. Agrega que problemas concretos, relacionados con la realidad o con áreas de estudio de la naturaleza o incluso con la propia práctica matemática, pueden ser reconocidos como un campo de intervención de la herramienta algebraica lo que permite la percepción de la funcionalidad del álgebra sin reducirla a la manipulación formal de expresiones algebraicas, a la resolución de ecuaciones o de ciertos problemas prototípicos.

Referencias bibliográficas

- Almeida, T. (2010). *Sólidos Arquimedianos e Cabri 3D: um estudo de truncaturas baseadas no renascimento* (Dissertação de Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática.
- Almouloud, S. (2010). Registros de Representação Semiótica e Compreensão de Conceitos Geométricos. Machado, Silvia Dias Alcântara (Org.), *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica* (pp. 125-148). Papirus.
- Andrade, M. (2011). *Geometria esférica: uma sequência didática para a aprendizagem de conceitos elementares no ensino básico* (Dissertação de Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática.
- Brasil (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Ensino Fundamental: terceiros e quarto ciclos. MEC/SE.
- Brasil (2002). Secretaria de Educação Média e Tecnológica (2002). *PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.
- Brasil (2018). *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*. *Educação é a Base*. <https://cutt.ly/IvWI2Fv>.
- Brousseau, G. (1997) *La théorie des situations didactiques – Le cours de Montréal*. <https://cutt.ly/3vWI7uQ>.
- Chevallard, Y. (1989-1990). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Troisième partie: voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x*, 23, 5-38.
- Chevallard, Y. (1994). Enseignement de l'algèbre et transposition didactique. *Rendiconti del seminario matematico*. Università Politecnica. Torino, 52(2), 175-234.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble: *La Pensée Sauvage-Éditions*, 19(2), 221-265.
- Duval, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine*. Peter Lang.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.
- Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas*. Tradução: Marlene Alves Dias. PROEM.
- Gascón, J. (2003). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría en Secundaria. I. Desaparición escolar de la razón de ser de la Geometría. *SUMA*, 44, 25-34.

- Gravina, M. (2015). O potencial semiótico do Geogebra na aprendizagem da geometria: uma experiência ilustrativa. *VIDYA*, 35, 237-253.
- Lorenzato, S. (1995). Por que não ensinar Geometria? *Educação Matemática em Revista, São Paulo*, 4, 3-13.
- Manrique, A., Silva, M., Almouloud, S. (2002). Conceitos geométricos e formação de professores do ensino fundamental. *Anais da 25ª Reunião da ANPEd*.
- Marmo, C. y Marmo, N. (1995). *Desenho Geométrico 2*. Editora Scipione.
- Mello, E. (2015). *A visualização de objetos geométricos por alunos cegos: um estudo sob a ótica de Duval* (Tese de Doutorado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática.
- Palles, C. (2013). *Um estudo do icosaedro a partir da visualização em geometria dinâmica*. (Dissertação de Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática.
- Parzys, B. (2006). La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles: de quoi s'agit-il? *Quaderni di Ricerca Didattica*, GRIM, 17, 128-151.
- Pavanello, R. (1993). O Abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e conseqüências. *Zetetiké*, 1, 7-17.
- Pataki, I. (2003). *Geometria esférica para a formação de professores: uma proposta interdisciplinar*. (Dissertação de Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática.
- Possani, J. (2012). *Uma sequência didática para a aprendizagem do volume do icosaedro regular*. (Dissertação de Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.
- Salazar, J. (2009). *Gênese Instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo de Transformações Geométricas no Espaço*. (Tese de Doutorado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática.
- Santos, A. (2016). *Construção e medida de volume dos poliedros regulares convexos com o Cabri 3D: uma possível transposição didática*. (Tese de Doutorado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática.
- Silva, M. y Almouloud, S. (2013). Estudo de uma organização didática para construção de fórmulas para a medida de volume de sólidos. *Anais do VII CIBEM*, 7658-7665.
- Silva, M., Manrique, A. y Almouloud, S. (2004). Possíveis mudanças de postura em professores do ensino fundamental trabalhando com geometria. *Anais do VII Encontro Nacional de Educação Matemática*, Recife.

Silva, M. y Almouloud, S. (2018). Um Modelo Epistemológico de Referência para o estudo da planificação de superfícies de pirâmides triangulares. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, 20(3), 327-346.

CAPÍTULO 7

LA ANSIEDAD Y EL AGRADO EN CLASES DE ESTADÍSTICA: UN ESTUDIO PRELIMINAR

Ana Paola Castillo Domenech

acastillo@usfq.edu.ec

Departamento de Matemáticas

Universidad San Francisco de Quito

Quito, Pichincha, Ecuador

Nathan C. Ryan

nathan.ryan@bucknell.edu

Departamento de Matemáticas

Bucknell University

Lewisburg, Pensilvania, EE. UU.

1. Introducción

Matemáticas, por años, ha sido considerada como una disciplina indispensable en la formación de cualquier universitario. Es reconocida por su aplicabilidad e impacto en el desarrollo del pensamiento científico. A pesar de que es indiscutible su valor y utilidad, no es menos cierto que la enseñanza tradicional de esta asignatura la ha alejado de su verdadero sentido científico: en lugar de fomentar la curiosidad, el pensamiento crítico y la capacidad de disfrutar del proceso —aspectos intrínsecos del aprendizaje de las matemáticas— se la ha reducido a una serie de reglas y procedimientos abstractos, absurdos y descontextualizados (Fernández et al., 2005). En consecuencia, la realidad de la experiencia en el aula evidencia que el estudiante promedio asocia a esta materia con el miedo, la ansiedad y el desagrado.

Esta diferencia entre lo esperado y lo ocurrido solo puede disminuir cuando se cambie la visión distorsionada de la enseñanza de las matemáticas para que deje de ser considerada como una simple “memorización mecánica de operaciones rutinarias de cómputo y de repetición de datos” (Valverde y Näslund-Hadley, 2011, p.10) y se convierta en una exploración guiada que favorezca la construcción de conceptos, que incluya el uso de un lenguaje adecuado y se base en metodologías pedagógicas de vanguardia. El presente estudio busca estudiar las causas que generan emociones aversivas hacia las Matemáticas, en particular hacia la parte de Estadística, y analizar las correlaciones existentes entre la motivación de estudiantes universitarios y su rendimiento académico en esta área.

2. Marco teórico

a) La motivación y el rendimiento académico

Muchas veces se piensa que el rendimiento académico de los alumnos está definido por su potencial cognitivo, pero nos enfrentamos con muchos casos en los que los alumnos con gran potencial no lo reflejan en su desempeño académico y nos preguntamos a qué se debe.

THORNBERRY (2003)

Diversas investigaciones han demostrado que la motivación que presentan los estudiantes al enfrentarse a una nueva materia constituye un factor clave para su aprendizaje e incluso puede determinar en gran medida el éxito o fracaso académico (Afzal et al., 2010; Alsina y Domingo, 2007; Félix, 2015; Mega, Ronconi y De Beni, 2014; Ruiz Sánchez y Quintana, 2016). La motivación es responsable de las variaciones en intensidad, calidad y dirección del comportamiento académico de los estudiantes.

La palabra *motivación* proviene del latín *motus* que significa ‘movimiento’, y hace referencia a lo que nos mueve a realizar una acción, empezarla o mantenerla, gestionando los medios y recursos necesarios para lograrla. Como categoría psicológica, el concepto ha evolucionado desde la teoría instintiva de pulsión de Freud publicada en 1917, pasando por la jerarquía de necesidades humanas de Maslow en 1943, hasta llegar a las conocidas investigaciones de McClellan en 1989. La definición que mejor refleja la motivación en el plano académico es la que **Barrett y Murray** (1938) llaman *motivación de logro*, que puede definirse como:

El producto de las expectativas (probabilidad subjetiva respecto al éxito y fracaso) y del valor concedido al resultado (éxito o fracaso) que se espera obtener. La conducta de logro se caracteriza por su dirección (elección y persistencia) y se concede importancia a las diferencias individuales (necesidad de logro, ansiedad respecto al éxito/fracaso, locus de control, etc.) (Ruiz Sánchez y Quintana, 2016, p.87).

La motivación de logro es, entonces, contraria a la indiferencia. Dicho en otras palabras “un estudiante está motivado académicamente cuando no permanece indiferente ante cualquier aprendizaje nuevo o tarea que se le propone” (Alsina y Domingo, 2007, p.24). El desganado y desinterés frente a lo académico muestran una falta de motivación de logro, que afecta no solo al rendimiento inmediato de los alumnos, sino también a la utilización de lo aprendido en la vida profesional futura de los estudiantes (Auzmendi, 1992; Thornberry, 2003).

Se entiende por *rendimiento académico* al valor que el estudiante le atribuye al éxito en su desempeño académico fundamentado en las calificaciones obtenidas (Garbanzo, 2013), aspecto que depende en gran

medida del sistema de medición y de las tendencias de evaluación que cada institución educativa utiliza. A pesar de que los autores consideran que la definición de rendimiento académico va más allá de una simple calificación en escala numérica y se acerca más a la del conjunto de logros y competencias desarrollados por los estudiantes durante todo el proceso educativo, es importante mencionar que este estudio utiliza la nota final de los estudiantes en el curso de Estadística (tanto de la clase práctica como de la clase teórica) como la forma de conocer el rendimiento académico.

Dicha nota suele ser una media ponderada de múltiples evaluaciones aplicadas a lo largo de todo el proceso de aprendizaje. Entre las actividades y herramientas de evaluación diversas se encuentran proyectos, trabajos colaborativos en clase, exámenes parciales, pruebas cortas, actividades fuera del aula, coevaluaciones, autoevaluaciones, deberes, participación en clase, porcentajes de asistencia, entre otros. En esencia, el tipo de evaluación utilizada, conocida como evaluación de desempeño, es integral, continua y multidimensional, debido a que se aplica en diversos momentos, utiliza varias herramientas, cuenta con múltiples observadores y observados y se enfoca en habilidades, contenidos y actitudes (Gallardo y Gil Rendón, 2016).

b) La enseñanza tradicional de la estadística y sus consecuencias

A pesar de que existe una extensa cantidad de estudios sobre el efecto de la motivación y sus diferentes dimensiones en el aprendizaje, siguen escasas las investigaciones que se han dedicado al ámbito específico de la estadística. Entre todas las ramas de las matemáticas, la estadística es quizá una de las áreas que más se destaca por su aplicabilidad y por su naturaleza interdisciplinaria. Como observa Blanco (2018), el método y el pensamiento estadístico permean y modelan el quehacer científico en una multitud de ámbitos de conocimiento, por eso es una disciplina y una herramienta intelectual transversal.

La estadística está muy lejos de convertirse en la materia favorita de los estudiantes. Aunque es indiscutible su utilidad, no es común pensarla como una disciplina divertida, lúdica y motivadora. Por el contrario, usualmente es considerada como una materia rígida y difícil, lo que ha generado gran aversión hacia la disciplina, baja motivación en los alumnos y altos niveles de ansiedad.

Cuando esto ocurre, cuando existe un patrón motivacional negativo frente a una dificultad, lo explica Font (1994), aumenta la ansiedad del estudiante, quien se angustiará pensando que la causa de la dificultad es su incapacidad, por lo que adoptará una actitud defensiva (Alsina y Domingo, 2007), lo que terminará por influir de manera significativa en su rendimiento académico tanto en la resolución del problema que enfrenta como en futuras exposiciones a problemas similares.

La experiencia repetitiva de patrones motivacionales negativos hacia la estadística es muy común en los estudiantes desde sus primeros acercamientos a la disciplina, por lo que los niveles de ansiedad alcanzados en muchos universitarios son tan altos que obligan a los maestros a reparar en ello. Debido a que la enseñanza tradicional de la matemática, y en particular de la estadística, ha primado lo cognitivo con predominio de lo memorístico y procedimental sobre el componente socio-afectivo, no es de sorprenderse que muchos de los estudiantes universitarios presenten una marcada y negativa predisposición a la estadística, lo que pone en juego su esfuerzo y compromiso con el aprendizaje de la disciplina y termina por afectar su rendimiento académico. En consecuencia, surge la necesidad de construir un modelo pedagógico cognitivo y socio afectivo que le dé la motivación a los estudiantes y de ese modo ellos le brindarán el tiempo y la importancia que merece la asignatura.

c) El enfoque constructivista detrás de la propuesta

El constructivismo pedagógico es un enfoque pedagógico que nació como un movimiento revolucionario que se contrapone a la educación tradicional centrada en la enseñanza para convertir al aprendizaje en el objetivo de la educación (Tünnermann, 2011). Aunque el enfoque no es una corriente homogénea, ya que varía según diversos autores, los constructivistas entienden al aprendizaje como un proceso de construcción progresivo, dinámico e interactivo, que ocurre dentro de la mente del aprendiz (Serrano y Pons, 2011; Tünnermann, 2011). Cuando este proceso interno es potenciado por la interacción del aprendiz con otros, se conoce como constructivismo social. De acuerdo con este enfoque constructivista sociocultural, fundado por Vygotsky en 1931, el contexto ocupa un lugar importante en el aprendizaje. En tal sentido, el aula es un contexto de aprendizaje, en ella se construyen

y fundamentan las secuencias didácticas de las clases. Por tanto, el aula de clases debería ser un espacio de aprendizaje seguro, previamente diseñado, que promueva la interacción armónica entre los alumnos, los profesores y la disciplina.

3. Metodología

La metodología utilizada en esta investigación es un análisis mixto, cuali-cuantitativo, experimental y de tipo correlacional. Se basa en la aplicación de una encuesta en línea con 25 reactivos que miden la motivación de los estudiantes en la materia de Estadística.

3.1 Instrumento de medición

Se utiliza la Escala de Actitud hacia la Estadística (EAE) de Auzmendi (1992) por ser considerada una de las escalas más investigadas y usadas en las investigaciones (Tejero y Castro, 2011). La encuesta está compuesta por 25 reactivos divididos en cinco dimensiones: utilidad, ansiedad, confianza, agrado y motivación. Cada reactivo posee un rango de respuesta Likert de cinco puntos que van desde *totalmente en desacuerdo* (equivalente a 1) hasta *totalmente de acuerdo* (equivalente a 5). El valor central neutral 3 corresponde a la respuesta *ni de acuerdo ni en desacuerdo*. La Tabla 1 muestra el resumen de las dimensiones con sus respectivas preguntas asociadas.

Tabla 1. Dimensiones de la motivación

Siglas	Factores de la motivación (Auzmendi, 1992)	Preguntas	Descripción
U	Utilidad	1, 6, 11, 16*, 21	Valor (utilidad subjetiva) que el estudiante otorga al conocimiento de la estadística.
An	Ansiedad	2*, 7*, 12*, 17*, 22*	Sentimiento de ansiedad o temor que se manifiesta ante la estadística.
Co	Confianza	3, 8, 13, 18, 23	Seguridad que siente el estudiante cuando se enfrenta a la estadística.
Ag	Agrado	4, 9, 14, 19 y 24	Disfrute que provoca el trabajar con la estadística.
Mo	Motivación	5*, 10*, 15*, 20 y 25*	Motivación que siente el estudiante hacia el uso y estudio de la estadística.

Fuente: Elaboración propia

Nota. Las preguntas señaladas con asterisco están escritas en negativo.

Esta investigación se centra en las dimensiones de *ansiedad* y *agrado* por ser aquellas que evidenciaron mayor cambio en los 138 estudiantes que asistieron a un curso de Estadística pedagógicamente pensado para motivarlos al estudio de la disciplina y disminuir su aversión.

3.2 Descripción de la muestra

La encuesta fue aplicada a estudiantes de pregrado de la Universidad San Francisco de Quito (USFQ) que cursaban la materia de Estadística (Estadística para la Ingeniería y Bioestadística). Se aplicaron un total de 180 encuestas, pero se eliminaron 42 sujetos por no responder a la encuesta de manera completa, de modo que el análisis del estudio incluye un total de 138 estudiantes con edades de entre 17 y 29 años

(con una media de 20 años). El 53 % de la muestra está conformada por mujeres y el 47 % restante por hombres. Debido a la flexibilidad que tienen los estudiantes de la USFQ de elegir sus materias, el curso de Estadística lo toman alumnos de diferentes carreras y niveles, y si consideramos que la USFQ cuenta con 10 facultades o colegios, colegimos la diversidad de estudiantes que la estudian. Este estudio se enfoca en los estudiantes del Colegio de Ciencias e Ingenierías, conocido como Politécnico, y del Colegio de Ciencias Sociales y Humanidades (COCISOH). La Tabla 2 resume la información general de la universidad y de la muestra seleccionada.

Tabla 2. Datos de identificación de la institución (USFQ)

Descripción de la población de la USFQ			Descripción de la muestra Politécnico y Cosisoh	
Cantidad de estudiantes	Cantidad de personal académico	Colegios y Carreras	Cantidad de cursos analizados	Cantidad de estudiantes
8400 (incluyendo 500 indígenas y 900 internacionales)	967	10 colegios 51 carreras	10 (4 Bioestadística y 6 Estadística para la Ingeniería)	138 (49 Bioestadística y 89 Estadística para la Ingeniería)

Fuente: Elaboración propia

Durante los años lectivos 2017-2018 y 2018-2019 la primera autora de este artículo elaboró e implementó diez cursos de laboratorio en la USFQ, cuatro denominados Bioestadística (cursos diseñados para estudiantes de las carreras de Ciencias Sociales y de Ciencias de la Salud) y seis denominados Estadística para Ingeniería (cursos diseñados para estudiantes de Ingeniería). En la Tabla 3 se muestra un resumen de la distribución de los estudiantes que completaron la encuesta EAE al inicio y al final de estos diez cursos.

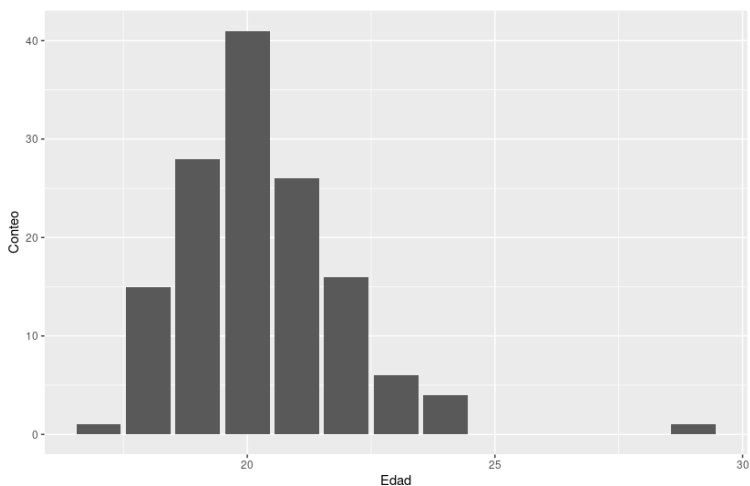
Tabla 3. Distribución de la muestra, hombres y mujeres, por curso

Año lectivo	Bioestadística	Estadística para ing.	Total
2017-2018	0 (0 mujeres)	18 (6 mujeres)	18 (6 mujeres)
2018-2019	49 (38 mujeres)	71 (30 mujeres)	120 (68 mujeres)
Total	49 (38 mujeres)	89 (36 mujeres)	138 (74 mujeres)

Fuente: Elaboración propia

En la Figura 1 se puede observar la distribución de las edades de los alumnos (ver también la Tabla 4). En la Figura 2 se muestra una representación gráfica de las carreras representadas en cada curso; se resume en la Tabla 5.

Figura 1. Representación gráfica de la distribución de edades en los cursos



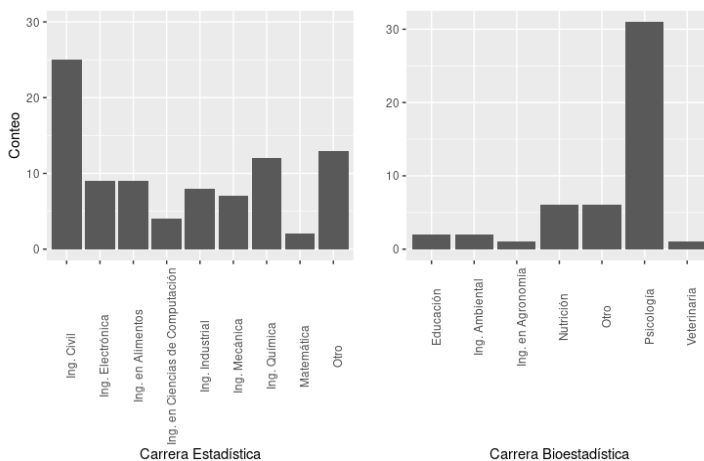
Fuente: Elaboración propia

Tabla 4. Distribución de la muestra por edad

Edad	Alumnos
17	1 (0,7%)
18	15 (10,7%)
19	28 (20,2%)
20	41 (29,7%)
21	26 (18,8%)
22	16 (11,6%)
23	6 (4,3%)
24	4 (2,9%)
>24	1 (0,7%)
Total	138

Fuente: Elaboración propia

Figura 2. Representación gráfica de la distribución de carreras en cada curso



Fuente: Elaboración propia

Tabla 5. Distribución de la muestra, por carrera y por curso

Curso	Carrera	Alumnos	Total
Bioestadística	Educación	2 (4,1%)	49
	Ingeniería Ambiental	2 (4,1%)	
	Ingeniería en Agronomía	1 (2,0%)	
	Nutrición	6 (12,2%)	
	Otro	6 (12,2%)	
	Psicología	31 (63,3%)	
	Veterinaria	1 (2,0%)	
Estadística para la Ingeniería	Ingeniería Civil	25 (28,1%)	89
	Ingeniería Electrónica	9 (10,1%)	
	Ingeniería en Alimentos	9 (10,1%)	
	Ingeniería en Ciencias de Comp.	4 (4,5%)	
	Ingeniería Industrial	8 (9,0%)	
	Ingeniería Mecánica	7 (7,9%)	
	Ingeniería Química	12 (13,5%)	
	Matemáticas	2 (2,2%)	
	Otro	13 (14,6%)	
Total			138

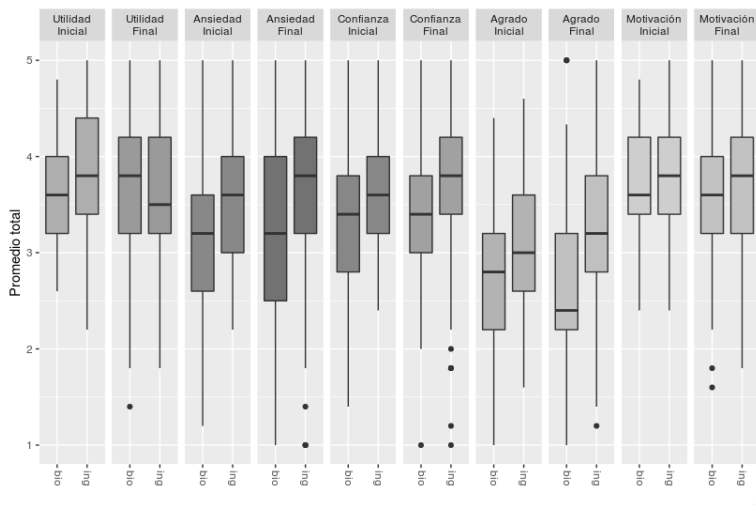
Fuente: Elaboración propia

3.3 Análisis exploratorio de datos

Cada alumno participante de la muestra completó una encuesta inicial y una final con los 25 reactivos divididos en las 5 dimensiones antes mencionadas. Como las respuestas a cada pregunta pertenecen a una escala de Likert, formalmente las variables no son cuantitativas continuas. Para obtener variables continuas, se trabajó con las cinco preguntas correspondientes a cada dimensión condensadas en un solo promedio. Debido a que la encuesta original de EAE se conforma por preguntas escritas en forma negativa y otras en positiva, se optó por cambiar la dirección de los resultados de las preguntas negativas para que los promedios tuvieran sentido. Este mismo procedimiento

se aplicó a los resultados de la encuesta inicial y final. En la Figura 3 se muestran las representaciones gráficas de las variables utilizadas y divididas por tipo de curso (Bioestadística vs. Estadística para la Ingeniería) y momento de aplicación (encuesta final vs. inicial).

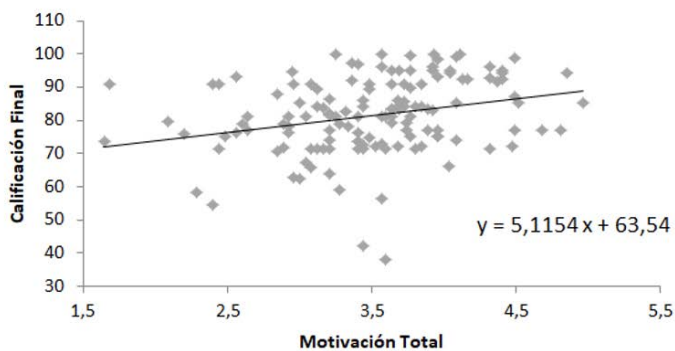
Figura 3. Comparaciones de los promedios por tipo de curso y momento de aplicación de la encuesta



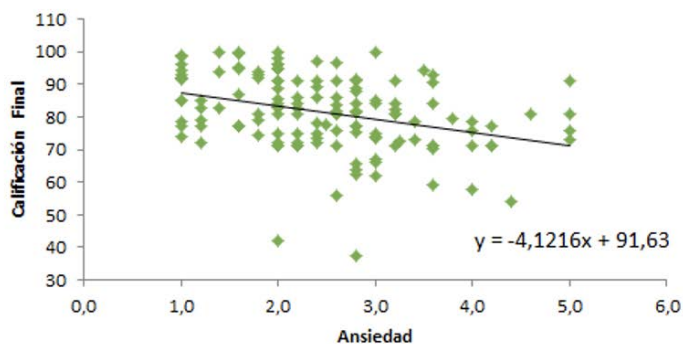
Fuente: Elaboración propia

La Figura 4 muestra dos gráficos de dispersión que evidencian la relación existente entre la calificación obtenida por el estudiante al final del curso y las variables que representan el promedio del nivel de motivación y ansiedad, respectivamente.

Figura 4. Motivación vs. calificación final y ansiedad vs. calificación final



Análisis de la Regresión	R ²	R ² (pred)	Valor F	Valor P
Motivación	7,61%	4,98%	11,21	<0,001



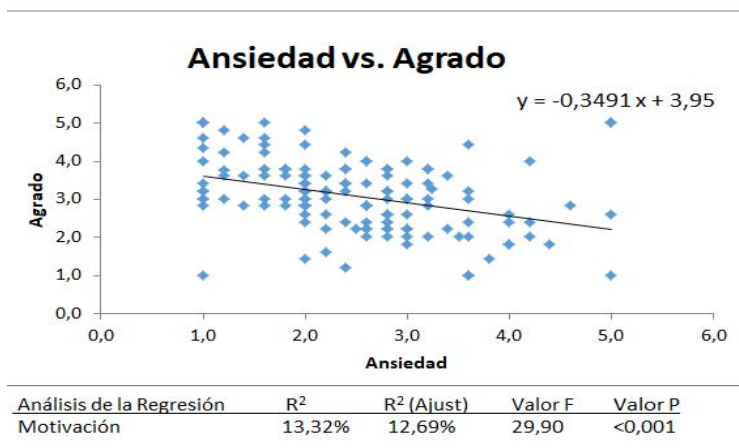
Análisis de la Regresión	R ²	R ² (Ajust)	Valor F	Valor P
Motivación	12,04%	11,4%	18,62	<0,001

Fuente: Elaboración propia

Nota. Representaciones gráficas de (i) la asociación entre el promedio de todas las preguntas en la encuesta y la calificación final que recibe cada estudiante, y (ii) el promedio de las preguntas sobre la ansiedad en la encuesta final y la calificación final recibida por el estudiante.

En la Figura 5 se observa un gráfico de dispersión que representa la relación entre el promedio de las preguntas de la encuesta correspondientes a la dimensión de *ansiedad* y aquellas correspondientes a la dimensión de *agrado*.

Figura 5. Ansiedad vs. agrado en los estudiantes encuestados



Fuente: Elaboración propia

4. Análisis de resultados

4.1 Asociación entre perfil demográfico y aprobación del curso.

126 de los 138 estudiantes que tomaron uno de los 10 cursos, la gran mayoría, lo aprobaron. Con el fin de saber si existía algún factor demográfico que afecte significativamente la aprobación o no del curso, se construyó un modelo logístico que tenía como entrada todas las variables demográficas (variables independientes) y como salida una variable binaria que determinaba si el alumno aprobó el curso. Además de los factores demográficos, se incluyó en el modelo una variable independiente que indicaba si el alumno había cursado la clase de Estadística con menos o más actividades constructivistas (23 o 25). La Tabla 6 resume las variables dependientes e independientes utilizadas en el modelo.

Tabla 6. Variables utilizadas en el modelo logístico

Tipo de variable	Descripción	Significancia
Dependiente	Aprobación del curso (Sí/No)	
Independiente	Semestre en que cursaron la asignatura (de primero a décimo semestre).	Sí
	Sexo (Hombre, Mujer)	No
	Carrera (Psicología, Biología, Matemáticas, Ing. Industrial, Ing. Mecánica, entre otros).	No No
	Tipo de materia (Bioestadística / Estadística para Ingeniería).	No
	Cantidad de actividades constructivistas. (Más / Menos)	Sí

Fuente: Elaboración propia

En la Tabla 6 se encontró una asociación negativa significativa entre el semestre en que cursaron con nivel de significancia $\alpha=0,10$ con la variable binaria dependiente. Es decir, para cada semestre que el alumno demora en cursar la asignatura, la probabilidad de que apruebe el curso decrece. De igual manera, se notó una asociación positiva significativa entre la cantidad de actividades constructivistas y la aprobación del curso, no así con las variables demográficas.

4.2 Diferencias en los promedios por dimensión y por tipo de curso

En primer lugar, se comparó entre las encuestas iniciales y finales completadas por los alumnos de Bioestadística y de Estadística para Ingeniería. Se aplicó una prueba de *t pareada* para la diferencia de medias. Podemos apreciar como resultado lo que ocurre con las cinco dimensiones:

Existe una diferencia significativa ($p=0,001$) en la ansiedad inicial de los alumnos en Bioestadística en comparación de los de Ingeniería; los de Bioestadística presentaron más ansiedad.

Existe una diferencia significativa ($p=0,054$) en la ansiedad final de los alumnos en Bioestadística con los de Ingeniería; los de Bioestadística demostraron más ansiedad.

Existe una diferencia significativa ($p=0,003$) en el agrado inicial de los alumnos en Bioestadística con los de Ingeniería; los de Ingeniería evidenciaron más agrado.

Existe una diferencia significativa ($p=0,0002$) en el agrado final de los alumnos en Bioestadística con los de Ingeniería; los de Ingeniería tenían más agrado.

Las otras dimensiones no mostraron diferencias significativas. Se realizó también una comparación del cambio de cada dimensión por tipo de curso (Bioestadística y Estadística para Ingeniería) y no se pudo encontrar una diferencia significativa en ninguna de las dimensiones.

En segundo lugar, se fijó el tipo de curso (Bioestadística o Estadística para la Ingeniería) y se hizo una comparación entre las encuestas finales e iniciales. Se obtuvo que:

Existe una diferencia significativa ($p=0,056$) entre la ansiedad final y la ansiedad inicial. Para los alumnos de Bioestadística la ansiedad bajó entre las dos encuestas.

No existe una diferencia significativa entre la ansiedad final y la ansiedad inicial para los alumnos de Ingeniería.

No existe una diferencia significativa entre el agrado final y el agrado inicial para los alumnos de Bioestadística.

Existe una diferencia significativa ($p=0,002$) entre el agrado final y el agrado inicial para los alumnos de Ingeniería. El agrado subió entre las dos encuestas.

Las otras dimensiones no evidenciaron diferencias significativas.

4.3 Relaciones con rendimiento académico

Para determinar si hay una relación entre las variables de la encuesta y el rendimiento académico se construyó un modelo lineal entre la calificación final obtenida por el alumno y las variables de los promedios de las cinco dimensiones. La única dimensión que se encontró asociada de manera significativa ($p=0,032$) con la calificación final fue la ansiedad: para cada punto que sube el promedio de las

respuestas sobre ansiedad, la calificación bajó 4,12 puntos.

Tomando el promedio de todas las respuestas a la encuesta se construyó una variable que representa la motivación total del alumno. En esta construcción se invirtieron las respuestas de las preguntas escritas en negativas para que fuesen positivas. Se evidenció una relación significativa ($p=0,001$) entre esta variable y la calificación final: para cada punto que sube el promedio de todas las respuestas, la calificación sube 5,12 puntos.

4.4 Relaciones entre ansiedad y agrado

Luego se determinó si existe una relación entre la ansiedad y el agrado. Como estas dos dimensiones solían ser significativas (véase nuevamente la Figura 5), se construyó un modelo lineal. Los resultados arrojaron un valor p menor a 0,001, evidenciando una relación significativa que arrojó como resultado que la ansiedad explica el 13,3 % de la variabilidad del agrado.

5. Conclusiones

De manera general, los cursos de Estadística para Ingeniería y Bioestadística cumplieron con su objetivo: elevar la motivación de los estudiantes. Los resultados obtenidos en esta investigación apoyan la afirmación de estudios anteriores (Afzal et al, 2010; Alsina y Domingo, 2007; Félix, 2015; Mega, Ronconi y De Beni, 2014; Ruiz Sánchez y Quintana, 2016) respecto a la asociación positiva entre la motivación y el rendimiento académico. Así podemos concluir que los estudiantes con mayor motivación hacia la Estadística (al final del curso) tienen mayor probabilidad de lograr un rendimiento académico alto. La relación entre motivación y rendimiento académico se produjo independientemente del tipo de curso, carrera o género de los estudiantes.

Entre todas las dimensiones analizadas, las que mostraron mayor cambio fueron las de ansiedad y de agrado. Sin embargo, fue evidente la diferencia del impacto en los cursos según la audiencia. Por un lado, se encontraban los estudiantes de Estadística para Ingeniería (quienes iniciaron el curso con niveles bajos de ansiedad), por lo tanto, su

motivación se produjo en la dirección de la dimensión de agrado.

Por otro lado, los estudiantes de Bioestadística (quienes empezaron el curso con niveles altos de ansiedad) mostraron una mejora significativa en esta dimensión. Lo anterior es congruente con la jerarquía de necesidades de Maslow, ya que es importante empezar por disminuir la ansiedad para pasar a trabajar en agrado. A medida que un estudiante “satisface sus necesidades surgen otras que cambian o modifican el comportamiento del mismo; considerando que solo cuando una necesidad está «razonablemente» satisfecha, se disparará una nueva necesidad” (Quintero, 2010, p.1).

Basados en esta jerarquía de necesidades se recomienda que los cursos de Estadística pensados para alumnos de carreras que históricamente han mostrado una aversión hacia las matemáticas en general y la estadística en particular incluyan en su currículo actividades diseñadas para disminuir la ansiedad. De igual manera, se sugiere que los cursos de Estadística para estudiantes que ya han superado la necesidad de seguridad se enfoquen en el desarrollo de los niveles de agrado.

Referencias bibliográficas

Afzal, H., Ali, I., Aslam Khan, M. y Hamid, K. (2010). A study of university students' motivation and its relationship with their academic performance. *International Journal of Business and Management*, 5(4), 80-88.

Alsina, Á. y Domingo, M. (2007). Cómo aumentar la motivación para aprender matemáticas. *Suma*, 56, 23-31.

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas medias y universitarias*. Ediciones Mensajero.

Barrett, W. y Murray, H. (1938). *Explorations in Personality: A Clinical and Experimental Study of Fifty Men of College Age* (2609). Oxford University Press.

Blanco, A. (2018). Directrices y recursos para la innovación en la enseñanza de la Estadística en la universidad: una revisión documental. *Revista de Docencia Universitaria*, 16(1), 251-267.

<https://doi.org/ezbiblio.usfq.edu.ec/10.4995/redu.2018.9372>.

Félix, A. (2015). *Influencia de la motivación en el rendimiento académico de primer año de los alumnos de las carreras de Ingeniería en Sistemas Computacionales, Ciencias de la Comunicación, Administración de Empresas y Gastronomía de una universidad privada de México* [Tesis de maestría]. Instituto Tecnológico de Monterrey.

Font, V. (1994). Motivación y dificultades de aprendizaje en matemáticas. *Suma*, 17(1), 10-16.

Fernández, I., Gil, D., Valdés, P. y Vilches, A. (2005). ¿Qué visiones de la ciencia y la actividad científica tenemos y transmitimos? En D. Gil, B. Macedo, J. Martínez, C. Sifredo, P. Valdez y A. Vilches (Eds.), *¿Cómo promover el interés por la cultura científica?* (pp. 29-62). Oficina Regional de Educación para América Latina y el Caribe OREALC/UNESCO.

Gallardo, K. y Gil Rendón, M. (2016). Evaluación del desempeño en estudiantes de educación superior: uso de la herramienta *competere*. *Revista de Pedagogía*, 37(100), 187-205.

Garbanzo, G. (2013). Factores asociados al rendimiento académico en estudiantes universitarios desde el nivel socioeconómico: un estudio en la Universidad de Costa Rica. *Revista Electrónica Educare*, 17(3), 57-87.

Mega, C., Ronconi, L. y De Beni, R. (2014). What makes a good student? How emotions, self-regulated learning, and motivation contribute to academic achievement. *Journal of Educational Psychology*, 106(1), 121-131.

Quintero, J. (2010). *Teoría de las Necesidades de Maslow*. <https://cutt.ly/ovArfOM>.

Ruiz Sánchez, G. y Quintana, A. (2016). Atribución de motivación de logro y rendimiento académico en matemática. *PsiqueMag*, 4(1), 81-98.

Serrano, J. y Pons, R. (2011). El constructivismo hoy: enfoques constructivistas en educación. *Revista electrónica de investigación educativa*, 13(1), 1-27.

Tejero, C. y Castro, M. (2011). Validación de la escala de actitudes hacia la estadística en estudiantes españoles deficiencias de la actividad física y del deporte. *Revista Colombiana de Estadística*, 34(2), 1-14.

Thornberry, G. (2003). Relación entre motivación de logro y rendimiento académico en alumnos de colegios limeños de diferente gestión. Universidad de Lima, Perú: *Persona*, 6 (1), 197-216. <http://revistas.ulima.edu.pe/index.php/Persona/article/view/931/880>

Tünnermann, C. (2011). El constructivismo y el aprendizaje de los estudiantes. *Universidades*, 48, 21-32.

Valverde, G., y Näslund-Hadley, E. (2011). *La condición de la educación en Matemáticas y Ciencias Naturales en América Latina y el Caribe*. Inter-American Development Bank.

Anexo A.
Ejemplo de secuencia
didáctica

Secuencia actividad inicial: “Definamos juntos la estadística”

Competencia para desarrollar o fortalecer: El alumno debe ser capaz de reconocer cómo sus conocimientos previos asociados a la estadística se relacionan con los nuevos conocimientos que se plantean y con las situaciones de la vida real. Así mismo, debe ser capaz de discriminar aquellas preconcepciones erradas de las correctas, con el fin de construir una base sólida de conocimientos y destrezas que le den sentido a su aprendizaje.

Objetivo de aprendizaje: Recuperar conocimientos previos de los estudiantes en el campo de estadística con el fin de tener una idea general diagnóstica que sirva de partida para la clase.

Nivel taxonómico

Dominio de Conocimiento: A.2 Información - Hechos

Nivel de Pensamiento: 1.2 Recuperación - Recuerdo

Contenido temático: Introducción a la estadística descriptiva: conceptos básicos

Descripción de la actividad: La sesión está dividida en dos partes: la primera, de recuperación de saberes previos a través de una actividad grupal; y la segunda, de introducción a conceptos básicos estadísticos y clasificación de dichos conceptos en las categorías: métodos tabulares, gráficas, y medidas de tendencia central, locación y dispersión, a través de una actividad colaborativa.

Instrucciones de la actividad

Parte I: Recuperación de saberes previos

Lluvia de ideas: ¿qué idea llega a tu cabeza cuando escuchas la palabra estadística?

- Usando la pregunta guía el docente debe orientar a la clase con el fin de recuperar de los estudiantes, palabras o imágenes que ellos asocian con la estadística. Esas palabras o imágenes deben ser escritas o dibujadas en el pizarrón, por el docente o por los estudiantes, tal y como ellos las van proporcionando, de modo que al final de la actividad, el pizarrón termine lleno de palabras, símbolos o imágenes aleatorias y de forma desordenada.
- Si los estudiantes no recuerdan muchas palabras, el docente puede usar la analogía del funcionamiento de un ordenador con su cerebro, para ayudarlos a recuperar información. El docente puede pedirles que prendan sus cerebros, que abran una ventana de internet, que escriban mentalmente las palabras “estadística” y que naveguen por las pestañas de imágenes, videos y documentos, observando lo que obtienen. Es probable que los estudiantes reconozcan ciertas imágenes, pero que no sepan sus nombres, por lo que no se animen a hablar. Por ello, resulta útil pedirles a los estudiantes que sean ellos mismos los que pasen al pizarrón y dibujen el símbolo o gráfica que tienen en mente, aunque no conozcan su nombre.
- Si el docente desea, en esta instancia, puede pedirles a los estudiantes que saquen sus dispositivos móviles o computadoras y que realicen la actividad anterior, pero ahora sí usando buscadores en línea como Google.
- Para finalizar la lluvia de ideas, el docente puede agregar palabras, gráficas o símbolos, que note que no han sido escritos por los estudiantes, como aquellos de media, desviación estándar, percentiles.
- Una vez escritos en el pizarrón, debe preguntar a los estudiantes si reconocen dichos símbolos o imágenes.

Parte II: Trabajo colaborativo

Organización y clasificación de los elementos recabados en la Parte I.

- Se deben formar grupos aleatorios de tres integrantes.

- Cada grupo debe recibir una cartulina A3, materiales para escribir sobre ella y una hoja guía que contiene las especificaciones del trabajo y ejemplos de cómo construir un mapa mental.
- En conjunto, los integrantes del grupo deben leer las instrucciones de la hoja guía (Hoja Guía de Mapas Mentales).
- Cada grupo debe definir con sus palabras y usando las del pizarrón, el rol de la estadística descriptiva. Además, deben construir su propio mapa mental en el que organicen y clasifiquen en tres categorías (métodos tabulares, gráficas y medidas) la mayoría de las palabras, símbolos e imágenes que se encuentran en el pizarrón.
- Una vez terminada la actividad, cada grupo debe pegar las cartulinas en las paredes de la clase, con el fin de que todos los demás compañeros puedan observar su clasificación.
- Todos los integrantes del grupo deben moverse por la clase leyendo los carteles pegados.
- Con la ayuda de los estudiantes y tomando parte de lo realizado en las cartulinas, un mapa mental general. Es en este momento que el docente puede aclarar dudas o corregir clasificaciones que se encuentran mal ubicadas.

Estrategias de autodirección que se fomentan:

- La actividad colaborativa en la que los estudiantes trabajan con los compañeros de su grupo para determinar el rol de la estadística, activa el Sistema Self para la examinación de la importancia y eficiencia de lo que se va a aprender (Marzano y Kendall, 2007). Si el estudiante encuentra alguna utilidad en la materia, es probable que sienta mayor motivación para aprenderla.
- Cuando los estudiantes comparten sus resultados con otros grupos y discuten sobre la clasificación realizada son capaces de identificar posibles errores en sus propias clasificaciones y luego corregirlas. Esta actividad activa el Sistema Metacognitivo de cada estudiante y le permite monitorear sus procesos de pensamiento de forma autorregulada. (Marzano y Kendall, 2007)

Materiales didácticos:

- Marcadores líquidos y pizarra
- Computadora
- Proyector
- Hojas guía para la dinámica grupal colaborativa.
- Cartulinas A3
- Marcadores para cartulina

Modalidad: Presencial

Parte I: grupal (todo los estudiantes y el docente participan en la dinámica conjunta).

Parte II: colaborativa (en grupos de tres).

Duración: Parte I (30 min) y parte 2 (60 min).

Espacio y periodo de realización: En clase.

Mecanismo de evaluación:

Evaluación diagnóstica sumativa. El docente puede calificar el trabajo entregado por cada grupo para obtener una evaluación diagnóstica inicial.

Evaluación formativa. El docente debe observar la dinámica de la clase y proporcionar retroalimentación de manera inmediata cuando identifica que algún estudiante o grupo está mostrando un entendimiento erróneo de algún concepto (no necesariamente cuando tiene una mala clasificación, porque si no, no permite la autorregulación). De la misma manera debe alentar a los estudiantes o grupos que muestran un avance significativo.

La actividad de cierre es parte fundamental de la evaluación formativa, ya que le permite al estudiante comparar su clasificación con la resultante global del curso.

Medio y fecha de entrega: Entrega presencial por grupo, en clase, al final de la actividad.

Referencias bibliográficas

Marzano, R.J. y Kendall, J.S. (2007). *The new taxonomy of educational objectives*. California, EE.UU: Corwnin Press.

Apéndice B. Encuesta utilizada

Tabla B1. Los reactivos de la Escala de Actitud hacia la Estadística de Auzmendi (1992)

No.	Siglas	Preguntas
1	(U)	¿Considero la estadística como una materia muy necesaria en la carrera?
2	(An*)	¿La asignatura de estadística se me da bastante mal?
3	(Co)	¿El estudiar o trabajar con la estadística no me asusta en absoluto?
4	(Ag)	¿El utilizar la estadística es una diversión para mí?
5	(Mo*)	¿La estadística es demasiado teórica como para ser de utilidad práctica para el profesional medio?
6	(U)	¿Quiero llegar a tener un conocimiento más profundo de la estadística?
7	(An*)	¿La estadística es una de las asignaturas que más temo?
8	(Co)	¿Tengo confianza en mí mismo/a cuando me enfrento a un problema de estadística?
9	(Ag)	¿Me divierte el hablar con otros de estadística?
10	(Mo*)	¿La estadística puede ser útil para quien se dedique a la investigación, pero no para el profesional medio?
11	(U)	¿Saber utilizar la estadística incrementaría mis posibilidades de trabajo?
12	(An*)	¿Cuándo me enfrento a un problema de estadística, me siento incapaz de pensar con claridad?
13	(Co)	¿Estoy calmado/a y tranquilo/a cuando me enfrento a un problema de estadística?
14	(Ag)	¿La estadística es agradable y estimulante para mí?
15	(Mo*)	¿Espero tener que utilizar poco la estadística en mi vida profesional?
16	(U*)	¿Para el desarrollo profesional de nuestra carrera considero que existen otras asignaturas más importantes que la estadística?
17	(An*)	¿Trabajar con la estadística hace que me sienta muy nervioso/a?

18	(Co)	¿No me altero cuando tengo que trabajar en problemas de estadística?
19	(Ag)	¿Me gustaría tener una ocupación en la cual tuviera que utilizar la estadística?
20	(Mo)	¿Me provoca una gran satisfacción el llegar a resolver problemas de estadística?
21	(U)	¿Para el desarrollo profesional de mi carrera una de las asignaturas más importantes que ha de estudiarse es la estadística?
22	(An*)	¿La estadística hace que me sienta incómodo/a y nervioso/a?
23	(Co)	¿Si me lo propusiera creo que llegaría a dominar bien la estadística?
24	(Ag)	¿Si tuviera oportunidad me inscribiría en más cursos de estadística de los que son necesarios?
25	(Mo*)	¿La materia que se imparte en las clases de estadística es muy poco interesante?

Fuente: Los autores



UNIVERSIDAD
NACIONAL DE
EDUCACIÓN

La UNAE creó la colección “Nela Martínez Espinoza” en homenaje a la distinguida intelectual y política ecuatoriana, nacida en la provincia del Cañar.

Esta colección contempla en primera instancia las indagaciones y propuestas en el campo educativo que sean de interés de la UNAE. Así también las publicaciones de docentes e investigadores de la UNAE que hayan sido presentadas al Consejo Editorial, y que sin ser producto de una investigación, cuenten con el aval de alguna instancia académica de la Universidad. Finalmente las propuestas realizadas tanto por docentes, investigadores, estudiantes, personal administrativo y ciudadanos; escritores, artistas y profesionales que contribuyan a robustecer los objetivos de la UNAE. Esta colección será dirigida por el Consejo Editorial a través de la Dirección Editorial.



COLECCIÓN

NELA

MARTÍNEZ ESPINOSA

Universidad Nacional de Educación